

ℓ^2 -Alexander-Torsion von 3-Mannigfaltigkeiten

Masterarbeit

Vorgelegt von

Luca Leon Happel

aus Mönchengladbach

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

8. April 2026

Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer für die Betreuung dieser Arbeit, die Anregung des Themas und die immense Unterstützung durch zahlreiche Gespräche und Korrekturen. Ebenso danke ich Prof. Dr. Immanuel Halupczok, dessen anregende Kommentare in Oberseminaren und Vorlesungen mir stets eine wertvolle Hilfe waren, als auch dem gesamten Kollegium und den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Mathematischen Instituts der HHU für das stets freundliche und inspirierende Arbeitsumfeld.

Schließlich danke ich meinen Eltern für ihre immense fortwährende Unterstützung, sowie meinen Freunden, ohne die ich das Mathematikstudium wohl nie begonnen hätte.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Algebraische und analytische Grundlagen	6
1.1 Der Grad von Funktionen	6
1.2 Multiplikativ Konvexe Funktionen	8
2 Torsionsinvarianten	9
2.1 Reidemeister-Torsion	17
2.2 Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln und Von-Neumann-Algebren	30
2.2.1 Gruppenalgebra, $\ell^2(G)$ und reguläre Darstellungen	30
2.2.2 Gruppen-von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(G)$	32
2.2.3 Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln und Von-Neumann-Spur	37
2.3 Fuglede-Kadison-Determinante	39
2.3.1 Reguläre Fuglede-Kadison-Determinante	45
2.3.2 Fuglede-Kadison-Determinante und das Mahler-Maß	55
2.4 ℓ^2 -Torsion	56
2.4.1 Zusammenhang mit der Reidemeister-Torsion	59
3 3-Mannigfaltigkeiten	60
3.1 Primzerlegung und Geometrisierung	64
3.2 JSJ-Zerlegung	66
3.3 Faserungen über S^1 und die Thurston-Norm	69
4 Die ℓ^2 -Alexander-Torsion	75
4.1 Zulässige Tripel	76
4.2 Konstruktion der ℓ^2 -Alexander-Torsion	79
4.3 Der Grad der ℓ^2 -Alexander-Torsion	80
4.3.1 Multiplikative Konvexität	84
4.4 Berechnung der ℓ^2 -Alexander-Torsion	86
4.5 Der Grad der ℓ^2 -Alexander-Torsion und die Thurston-Norm	88
4.5.1 Der Fall residuell endlicher Twists	88
4.5.2 Der allgemeine Fall	90
Bibliografie	92
Erklärung	96

Einleitung

Ein zentrales Problem der Topologie ist es, topologische Räume bis auf Homöomorphismus oder Homotopieäquivalenz zu klassifizieren. In der algebraischen Topologie nutzen wir hierfür *algebraische Invarianten*: Funktoren aus der Kategorie \mathbf{Top} der topologischen Räume oder ihrer Homotopiekategorie \mathbf{HoTop} in algebraische Kategorien, welche Isomorphieklassen unterscheiden können. Klassische Beispiele sind die Betti-Zahlen und die *Reidemeister-Torsion*, welche wir durch Dimensionen und Determinanten aus Kettenkomplexen für kompakte CW-Komplexe gewinnen. So lassen sich etwa die *Linsenräume* mittels der Reidemeister-Torsion vollständig bis auf Homöomorphie klassifizieren [1, Theorem 1.3 und Kapitel 4], und das *Alexanderpolynom* $\Delta_K(t)$ eines gefaserten Knotens $K \subset S^3$ liefert die klassische Gleichheit

$$\deg \Delta_K = 2g(K) \quad 1$$

an das Knotengeschlecht $g(K)$, also das minimale Geschlecht einer eingebetteten Seifert-Fläche[2].

Möchten wir jedoch mit nicht kompakten Räumen arbeiten, wie etwa den universellen Überlagerungen von CW-Komplexen mit unendlicher Fundamentalgruppe, so reichen klassische Invarianten oft nicht aus. Hierzu führen wir die ℓ^2 -*Invarianten* ein, indem wir von den Werkzeugen der Funktionalanalysis Gebrauch machen. Ist \tilde{X} die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes X mit Fundamentalgruppe $G = \pi_1(X)$, so wirkt G frei und zellulär auf \tilde{X} , und die Kettenmoduln $C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ werden zu Modulen über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$. Der Ring $\mathbb{Z}[G]$ ist im Allgemeinen weder links- noch rechtsnoethersch, weshalb die Kategorie $\mathbb{Z}[G]\mathbf{Mod}$ a priori keinen geeigneten Begriff von Rang, Dimension oder Determinante trägt. Durch das Einführen der Gruppen-Von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(G)$ erhalten wir jedoch passende ℓ^2 -Analoge dieser Begriffe: die Von-Neumann-Spur $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}$, die Von-Neumann-Dimension $\dim_{\mathcal{R}(G)}$ und die *Fuglede-Kadison-Determinante* $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FK}}$, welche auf der ℓ^2 -Vervollständigung $\ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]\mathbf{Mod}} C_*(\tilde{X})$ definiert sind.

Ein Beispiel von besonderem Interesse sind die 3-Mannigfaltigkeiten. William Thurston gilt als einer der Begründer der modernen 3-Mannigfaltigkeitstheorie und erhielt 1982 die Fields-Medaille für seine Arbeiten zur Geometrisierung von 3-Mannigfaltigkeiten; Jahrzehnte später bewies Grigori Perelman Thurstons Geometrisierungsvermutung mit Hilfe des Ricci-Flusses und damit zugleich die Poincaré-Vermutung, womit das bisher einzige Millenniumproblem gelöst wurde. Ein zentrales Werkzeug, welches Thurston einführte, ist die nach ihm benannte *Thurston-Norm*: eine Halbnorm auf den Elementen φ_K der ersten Kohomologiegruppe $H^1(N; \mathbb{Z})$ einer orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit N , welche die „Komplexität“ von Flächen misst, die durch Poincaré-Dualität mit den Elementen von $H_2(N; \mathbb{Z})$ korrespondieren. Für das Komplement X_K eines nicht trivialen Knotens $K \subset S^3$ berechnet die Thurston-Norm genau das Knotengeschlecht [3, S. 28], [4, S. 71] :

$$x_{X_K}(\varphi_K) = 2g(K) - 1. \quad 2$$

Die *Reidemeister-Torsion* wurde 1935 von Reidemeister [5] als kombinatorische topologische Invariante eingeführt, um Linsenräume zu klassifizieren. Als ℓ^2 -Verall-

gemeinerung davon entwickelte Lück die ℓ^2 -Torsion [6] für kompakte CW-Komplexe mit verschwindenden ℓ^2 -Betti-Zahlen. Dubois, Friedl und Lück[4] verallgemeinerten diese 2014 für zulässige Tripel $(N, \varphi, \gamma)_{\mathbb{R}}^G$ zur ℓ^2 -Alexander-Torsion

$$\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow [0, \infty) \quad 3$$

und untersuchten sie in einem Preprint ausführlich[3]. Die genaue Definition zulässiger Tripel und der Torsion werden wir in Abschnitt 4 entwickeln. Insbesondere erhalten wir die ℓ^2 -Torsion als Spezialfall: $\tau^{(2)}(N, \varphi, \text{id})(1) = \exp(-\rho^{(2)}(N))$ nach [7, S. 22]. Der *asymptotische Grad* der ℓ^2 -Alexander-Torsion verallgemeinert den Grad des Alexanderpolynoms: für die *abelsche* ℓ^2 -Alexander-Torsion $\tau^{(2)}(X_K, \varphi_K, \varphi_K)$ eines Knotenkomplements X_K gilt $\text{deg}^a(\tau^{(2)}(X_K, \varphi_K, \varphi_K)) = \text{deg} \Delta_K = 2g(K) - 1 = x_{X_K}(\varphi_K)$ nach [4, Theorem 4.1(ii) und S. 71], wobei $\varphi_K : \pi_1(X_K) \rightarrow \mathbb{Z}$ den Morphismus bezeichnet, welcher einen (positiv orientierten) Meridian von K , also einen Erzeuger von $H_1(X_K; \mathbb{Z})$, auf 1 schickt [4, S. 72]. Die Frage, ob $\tau^{(2)}(N, \varphi, \text{id}) = x_N(\varphi)$ auch für allgemeine irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten gilt, blieb zunächst offen und wurde unabhängig von Friedl und Lück [7] sowie Liu [8] bewiesen.

Theorem 0.1 (*Y. Liu [8, Thm. 1.2]*). *Sei N eine irreduzible, orientierbare, kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit leerem oder inkompressiblem toroidalem Rand. Für jede Kohomologieklassse $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt dann für jeden Repräsentanten der vollständigen ℓ^2 -Alexander-Torsion $\tau^{(2)}(N, \varphi)$ die Gleichheit*

$$\text{deg}^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)) = x_N(\varphi). \quad 4$$

Ziel dieser Arbeit ist ein vollständiger Beweis dieses Theorems, indem wir alle notwendigen Definitionen und Resultate entwickeln. Wir folgen hierbei der Struktur von Liu[8] und Friedl-Lück[7].

1 Algebraische und analytische Grundlagen

Wir beginnen mit der Einführung einiger algebraischer und analytischer Konzepte, die wir im Verlauf der Arbeit benötigen werden. Soweit es nicht explizit anders angegeben ist, ist jede Mannigfaltigkeit glatt, kompakt, zusammenhängend und orientierbar, und Homologie und Kohomologie sind mit \mathbb{Z} -Koeffizienten.

Definition 1.1 (*S. Mac Lane [9, S. 56], A. Baker [10, S. 2]*). Wir bezeichnen mit

${}^R\mathbf{Mod}$	die Kategorie der R -Linksmoduln
${}^R\mathbf{Mod}$	die Kategorie der R -Rechtsmoduln
${}^S_R\mathbf{Mod}$	die Kategorie der R - S -Bimoduln für einen weiteren Ring S
$R\mathbf{Mod}$	die Kategorie der R -Moduln (also $R\mathbf{Mod} := {}^R_R\mathbf{Mod}$)

und durch ein hochgestelltes $(\bullet)^{\text{fr}}$ jeweils die volle Unterkategorie der freien (Links-/Rechts-/Bi-)Moduln endlichen Rangs, beziehungsweise mit $(\bullet)^{\text{fg}}$ die Unterkategorie der endlich erzeugten Moduln, oder mit $(\bullet)^{\text{pr}}$ und $(\bullet)^{\text{fg,pr}}$ die vollen Unterkategorien der projektiven Moduln beziehungsweise der endlich erzeugten projektiven Moduln. Ist $R = \mathbb{K}$ ein Körper, so schreiben wir $\mathbb{K}\text{-Vect}$ für die Kategorie der Vektorräume über \mathbb{K} .

Definition 1.2 (*C. A. Weibel [11]*). Wir bezeichnen mit $\mathbf{Ch}(\bullet)$ die Kategorie der \bullet -Kettenkomplexe, wobei \bullet eine der Kategorien aus Definition 1.1 ist. Mit $\mathbf{Ch}_b(\bullet)$ bezeichnen wir analog die volle Unterkategorie der beschränkten Kettenkomplexe.

Definition 1.3 (*S. Mac Lane [9, S. 25], S. Mac Lane [9, S. 41]*). Wir schreiben $\mathbb{K}\text{-Vect}^G$ für die Kategorie der Darstellungen einer Gruppe G in Vektorräumen über einem Körper K . Analog schreiben wir $\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg},G}$ für die volle Unterkategorie der Darstellungen auf Vektorräumen endlicher Dimension. Wir haben:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathbb{K}\text{-Vect}^G) &= \{(V, \rho) \mid V \in \text{Ob}(\mathbb{K}\text{-Vect}), \rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)\} \\ \text{Hom}((V, \rho), (W, \sigma)) &= \left\{ f : V \rightarrow W \left| \begin{array}{l} f \text{ äquivariant, d.h.} \\ f \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ f \quad \forall g \in G \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad 5$$

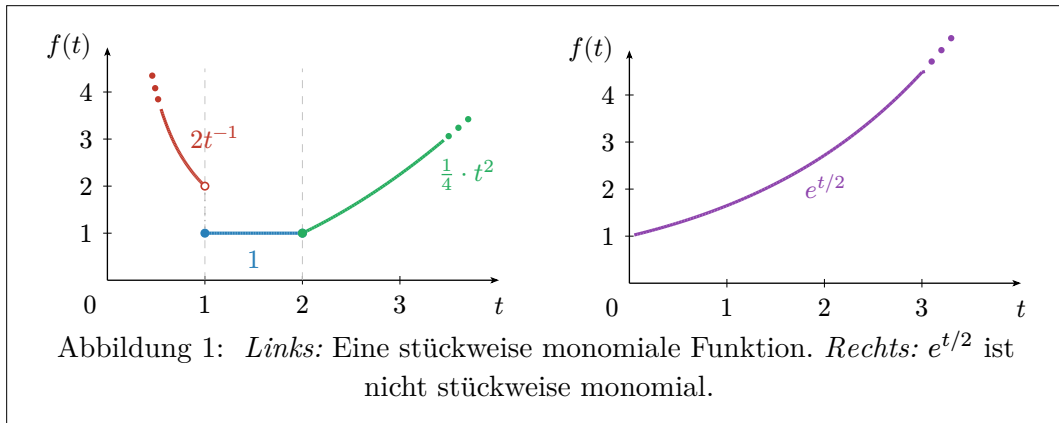
1.1 Der Grad von Funktionen

Wie wir bereits in Theorem 0.1 gesehen haben, wird der *Grad* von Funktionen eine entscheidende Rolle für uns spielen. Wie in Gleichung 3 möchten wir diesen zu Funktionen der Form $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuordnen können. Unser Ziel ist es, den Grad von Polynomen auf kompatible Weise zu verallgemeinern.

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion.

Definition 1.4 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 22], Y. Liu [8, S. 999]*). Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *stückweise monomial*, falls es eine Partition $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} := \infty$, Exponenten $d_0, \dots, d_k \in \mathbb{Z}$ und Skalare $C_0, \dots, C_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit

$$f(t) = C_i t^{d_i} \quad \text{für alle } t \in [t_i, t_{i+1}) \cap \mathbb{R}_{>0}. \quad 6$$



Jede stückweise monomiale Funktion erfüllt insbesondere die folgende Eigenschaft:

Definition 1.5 (Y. Liu [8, S. 983]). Wir definieren den *asymptotischen Grad* von f als

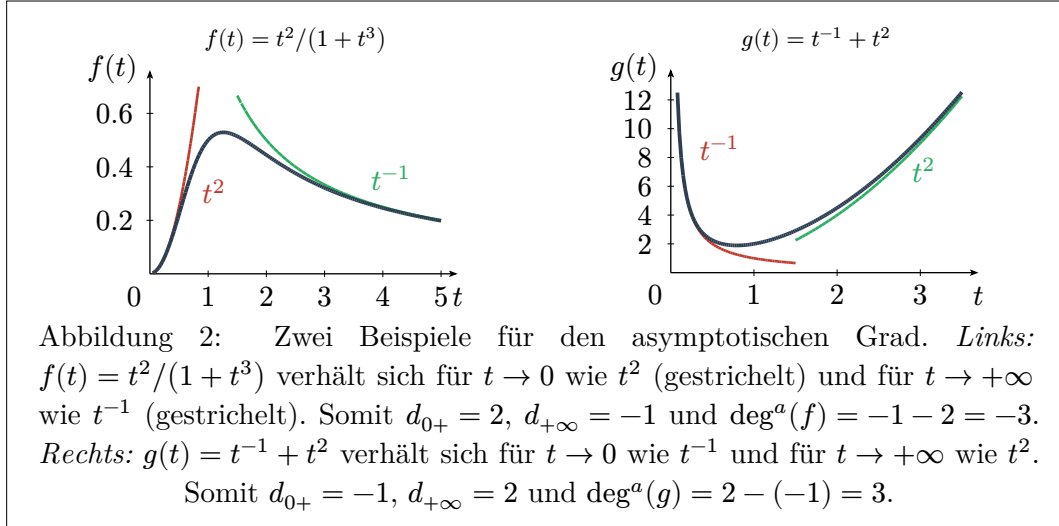
$$\deg^a(\cdot) : \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\deg^a(f) = d_{+\infty} - d_{0+} \quad 7$$

unter der Annahme, dass f an beiden Enden *asymptotisch monomial* ist, also:

$$\exists C_{+\infty} \in \mathbb{R}_+, d_{+\infty} \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{C_{+\infty} \cdot t^{d_{+\infty}}} = 1$$

$$\exists C_{0+} \in \mathbb{R}_+, d_{0+} \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{C_{0+} \cdot t^{d_{0+}}} = 1. \quad 8$$



Beispiel. Für ein Laurent-Polynom $f(t) = a_r t^r + \dots + a_s t^s$ mit $a_r, a_s \neq 0$ gilt $d_{0+} = r$ und $d_{+\infty} = s$, also $\deg^a(f) = s - r$. Zum Beispiel $\deg^a(t^{-2} + t + t^3) = 3 - (-2) = 5$.

Definition 1.6 (Y. Liu [8, S. 983]). Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion. Angenommen, dass das folgende Supremum und Infimum in \mathbb{R} existieren:

$$\deg_{0+}^b(f) = \sup \left\{ D_{0+} \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \cdot t^{-D_{0+}} = 0 \right\}. \quad 9$$

und

$$\deg_{\infty}^b(f) = \inf\left\{D_{+\infty} \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \cdot t^{-D_{+\infty}} = 0\right\}, \quad 10$$

Für eine solche Funktion f definieren wir den *wachstumsbeschränkten Grad* (growth bound degree) als

$$\deg^b(f) = \deg_{+\infty}^b(f) - \deg_{0+}^b(f) \in \mathbb{R}. \quad 11$$

Definition 1.7 (J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 22]). Wir bezeichnen zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ als *äquivalent* und schreiben $f \doteq g$, falls ein $m \in \mathbb{R}$ existiert mit

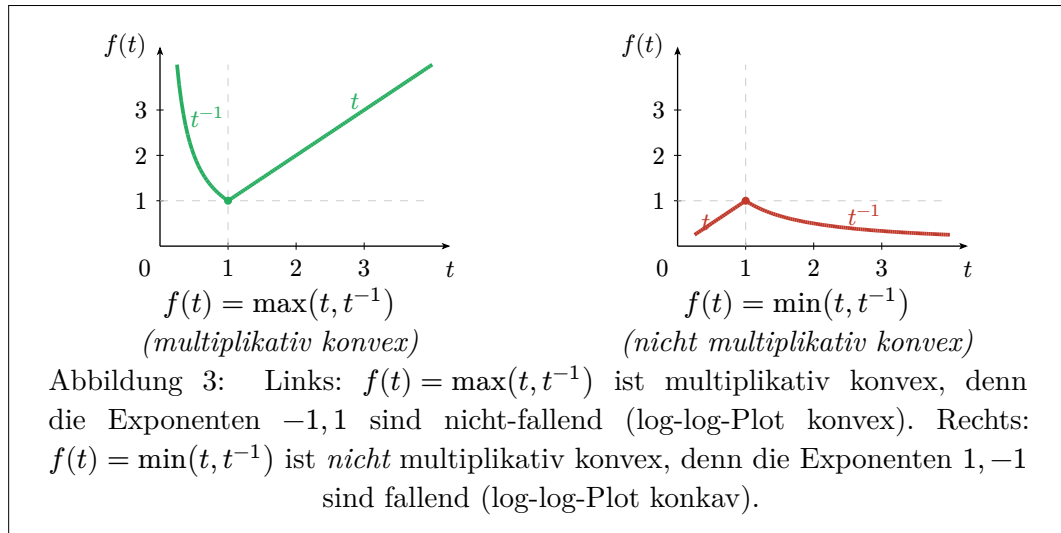
$$f(t) = t^m g(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{>0}. \quad 12$$

Wir schreiben $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, wenn $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}) / \doteq$.

1.2 Multiplikativ Konvexe Funktionen

Definition 1.8 (Y. Liu [8, S. 16]). Eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *multiplikativ konvex*, falls für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(t_0^\lambda t_1^{1-\lambda}) \leq f(t_0)^\lambda f(t_1)^{1-\lambda}. \quad 13$$



Es gilt:

Lemma 1.9 (Y. Liu [8, S. 17]).

1. f, g multiplikativ konvex impliziert $f \cdot g$ multiplikativ konvex
2. f multiplikativ konvex impliziert f^m multiplikativ konvex für alle $m \in \mathbb{R}$.
3. f multiplikativ konvex impliziert $f(t) = 0$ für alle t oder $f > 0$ auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$
4. Insbesondere ist jede multiplikativ konvexe Funktion stetig.

Beweis: Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ multiplikativ konvex. (1) - (3) sind klar. Falls $f > 0$ auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$, definiere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g := \log \circ f \circ \exp$. Dann gilt für alle $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
g(\lambda s_0 + (1 - \lambda)s_1) &= \log f(e^{\lambda s_0 + (1-\lambda)s_1}) \\
&= \log f((e^{s_0})^\lambda (e^{s_1})^{1-\lambda}) \\
&\leq \log(f(e^{s_0})^\lambda f(e^{s_1})^{1-\lambda}) \\
&= \lambda \log f(e^{s_0}) + (1 - \lambda) \log f(e^{s_1}) \\
&= \lambda g(s_0) + (1 - \lambda)g(s_1).
\end{aligned} \tag{14}$$

Also ist g konvex auf \mathbb{R} . Konvexe Funktionen auf offenen Intervallen von \mathbb{R} sind stetig. Da $f = \exp \circ g \circ \log$ eine Komposition stetiger Funktionen ist, ist f stetig. \square

Lemma 1.10 (Y. Liu [8, Lemma 4.3]). Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ multiplikativ mittelpunktskonvex (d. h. $f(\sqrt{t_0 t_1}) \leq \sqrt{f(t_0) \cdot f(t_1)}$ für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$) und halbstetig von oben. Dann ist f multiplikativ konvex.

Beweis: Setze $g := \log \circ f \circ \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Aus der multiplikativen Mittelpunktskonvexität von f folgt die (additive) Mittelpunktskonvexität von g , und aus der Halbstetigkeit von oben von f die von g .

- *Stetigkeit:* Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow x_0$ und $g(x_n) \rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Setze $y_n := 2x_0 - x_n$, sodass $(x_n + y_n)/2 = x_0$. Mittelpunktskonvexität liefert

$$g(x_0) \leq \frac{g(x_n) + g(y_n)}{2}. \tag{15}$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$g(x_0) \leq \frac{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x)}{2} \leq \frac{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) + g(x_0)}{2} \tag{16}$$

nach Halbstetigkeit von oben, also $\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$. Zusammen mit der Halbstetigkeit von oben folgt Stetigkeit von g , also von f .

- *Konvexität:* Falls $f > 0$ überall, so ist g stetig und mittelpunktskonvex auf \mathbb{R} , also konvex.
- *Nullfall:* Falls $f(t_0) = 0$ für ein t_0 , so liefert Iteration der Mittelpunktsungleichung $f = 0$ auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}_{>0}$. Da $f \geq 0$ und halbstetig von oben, folgt $f \equiv 0$.

\square

Definition 1.11 (Y. Liu [8, Def. 4.4]). Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}_{>0}$ ein Intervall positiver reeller Zahlen. Eine nirgends verschwindende multiplikativ konvexe Funktion $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$ hat *beschränkten Exponenten*, falls eine positive Konstante R existiert, sodass für alle Paare verschiedener Punkte $t_0, t_1 \in (a, b)$ gilt:

$$\left| \frac{\log f(t_1) - \log f(t_0)}{\log t_1 - \log t_0} \right| \leq R. \tag{17}$$

2 Torsionsinvarianten

Das zentrale Objekt dieser Arbeit ist die ℓ^2 -Alexander-Torsion $\tau^{(2)}(M, \varphi, \gamma)$, die in Abschnitt 4 eingeführt wird. Wir möchten diese schrittweise aus ihren konzeptionel-

len Vorläufern herleiten: von der *Torsionsinvariante*, zur klassischen *Reidemeister-Torsion*, über die ℓ^2 -*Torsion* bis hin zur ℓ^2 -*Alexander-Torsion*.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass im Studium der Homologiemoduln eines CW-Komplexes X die Betti-Zahlen $\text{rank}_{\mathbb{Z}} H_n(X; \mathbb{Z})_{\text{free}}$ anschaulich als Anzahl der n -dimensionalen Löcher in X interpretierbar sind, aber nach der Zerlegung $H_n(X; \mathbb{Z}) \cong H_n(X; \mathbb{Z})_{\text{free}} \oplus H_n(X; \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ invariant unter dem Torsionsteil $H_n(X; \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ sind. Um auch diese Information zu erfassen, führen wir *Torsionsinvarianten* ein, welche Informationen über $H_n(X; \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ kodieren.

Definition 2.1 (v. Turaev [12]). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim(V)$. Seien b und c zwei Basen von V , so existiert die Basiswechselmatrix $A = (a_{ij})$ gegeben durch

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \quad 18$$

und wir schreiben $[b/c] = \det A \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 2.2. Für zwei Basen a, b eines endlichen dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums ist

$$b \sim c \Leftrightarrow [b/c] = 1 \quad 19$$

eine Äquivalenzrelation und wir bezeichnen mit $[b]$ die Äquivalenzklasse der Basis b .

Beweis:

1. $[a/a] = 1$ für jede Basis a ist klar.
2. $[a/c] = [a/b] \cdot [b/c]$ für Basen a, b, c gilt, weil die Determinante ein Homomorphismus von $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ nach \mathbb{K}^* ist. □

Für eine kurze exakte Folge von endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0$$

gilt nach dem Splitting-Lemma, dass $B \cong A \oplus C$ und ein Schnitt $B \xleftarrow{\sigma} C$ zu ρ existiert. Für eine Basis $a = (a_1, \dots, a_n)$ von A und eine Basis $c = (c_1, \dots, c_m)$ von C ist somit

$$a \oplus \sigma(c) := (a_1, \dots, a_n, \sigma(c_1), \dots, \sigma(c_m)) \quad 20$$

eine Basis von B .

Proposition 2.3 (v. Turaev [12]). $[a \oplus \sigma(c)]$ hängt nicht von der Wahl des Schnitts σ und nur von $[a]$ und $[c]$ ab. Wir schreiben $[a \oplus c] := [a \oplus \sigma(c)]$

Beweis: Sei σ' ein weiterer Schnitt von ρ . Da $\rho \circ (\sigma - \sigma') = 0$, gilt $\text{im}(\sigma - \sigma') \subseteq \text{im} \iota$ und somit existiert ein Homomorphismus $f : C \rightarrow A$ mit $\sigma' = \iota \circ f + \sigma$.

Für die Basen a und c ist somit die Basiswechselmatrix von $a \oplus \sigma(c)$ zu $a \oplus \sigma'(c)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} I_n & F \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \quad 21$$

wobei F die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen a und c ist. Somit gilt $\det A = 1$ und somit

$$[a \oplus \sigma(c)/a \oplus \sigma'(c)] = 1 \quad 22$$

□

Sei (C, ∂) gegeben durch

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ein beschränkter Kettenkomplex von endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen.

Wir bezeichnen eine Familie $c := (c_i \in C_i)_{i=0, \dots, n}$ von Basen als Basis von C . Ist C azyklisch, also $H_i(C) = \ker(\partial_i)/\text{im}(\partial_{i+1}) = 0$, so ist für jedes $i \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \text{im } \partial_{i+1} \hookrightarrow C_i \twoheadrightarrow \text{im } \partial_i \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge. Nach Proposition 2.3 liefert eine Basis b von $\text{im } \partial$ als Kettenkomplex eine Äquivalenzklasse von Basen $[b_* \oplus b_{*-1}]$ von C .

Definition 2.4 (v. Turaev [12]). Für jede Wahl von Basen b_i von $\text{im } \partial_i$ nennen wir

$$\tau_c(C, b) = \prod_{i=0}^n [b_i \oplus b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{K}^* \quad 23$$

die *Torsionsinvariante* von C bezüglich der Basen c und b .

Proposition 2.5. $\tau(C, c, b)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis b . Wir schreiben daher

$$\tau(C, c) := \tau(C, c, b) \quad 24$$

für eine beliebige Wahl von b .

Beweis: Für den Induktionsanfang sind die Fälle für $i = -1$ und $i = n$ klar. Für den Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass

$$[b_i \oplus b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} [b_{i+1} \oplus b_i/c_{i+1}]^{(-1)^{i+2}} \quad 25$$

unabhängig von der Wahl von b ist. Sei b' eine weitere Basis von $\text{im } \partial$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass sich b und b' nur in der i -ten Komponente unterscheiden. Analog zum Beweis von Proposition 2.3 gilt

$$\begin{aligned} [b_{i+1} \oplus b'_i/c_{i+1}] &= [b_{i+1} \oplus b'_i/b_{i+1} \oplus b_i] \cdot [b_{i+1} \oplus b_i/c_{i+1}] \\ &= [b'_i/b_i] \cdot [b_{i+1} \oplus b_i/c_{i+1}] \\ [b'_i \oplus b_{i-1}/c_i] &= [b'_i \oplus b_{i-1}/b_i \oplus b_{i-1}] \cdot [b_i \oplus b_{i-1}/c_i] \\ &= [b'_i/b_i] \cdot [b_i \oplus b_{i-1}/c_i] \end{aligned} \quad 26$$

und durch das alternierende Vorzeichen der Exponenten heben sich die Faktoren $[b'_i/b_i]$ auf. □

Entscheidend hängt aber $\tau(C, c)$ von der Basiswahl c ab:

Proposition 2.6. Seien c und c' zwei Basen von C , so gilt

$$\tau(C, c) = \tau(C, c') \prod_{i=0}^n [c_i/c'_i]^{(-1)^{i+1}} \quad 27$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\tau(C, c') &= \prod_{i=0}^n [b_i \oplus b_{i+1}/c'_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \prod_{i=0}^n ([b_i \oplus b_{i+1}/c'_i] \cdot [c'_i/c_i] \cdot [c_i/c'_i])^{(-1)^{i+1}} \\
&= \prod_{i=0}^n ([b_i \oplus b_{i+1}/c_i] \cdot [c_i/c'_i])^{(-1)^{i+1}} \\
&= \prod_{i=0}^n [b_i \oplus b_{i+1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \prod_{i=0}^n [c_i/c'_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \tau(C, c) \prod_{i=0}^n [c_i/c'_i]^{(-1)^{i+1}}
\end{aligned} \tag{28}$$

□

Insbesondere erhalten wir:

Korollar 2.7.

1. Wenn $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3, \dots)$ und $c'_i = (c_i^2, c_i^1, c_i^3, \dots)$ für ein i und $c_j = c'_j$ für $j \neq i$, dann gilt $\tau(C, c) = -\tau(C, c')$.
2. Wenn $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3, \dots)$ und $c'_i = (\alpha c_i^1, c_i^2, c_i^3, \dots)$ für ein i und $c_j = c'_j$ für $j \neq i$, dann gilt $\tau(C, c) = \alpha^{(-1)^i} \tau(C, c')$.

Proposition 2.8. Ist (D, ∂^D) ein (nicht notwendigerweise endlicher) azyklischer Kettenkomplex, so existiert eine Kettenkontraktion $\delta : D \rightarrow D$.

Beweis: Wir nutzen wieder, dass die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{i+1}^D \hookrightarrow D_i \xrightarrow{\partial_i^D} \operatorname{im} \partial_i^D \longrightarrow 0$$

für jedes $i \in \mathbb{Z}$ spaltet und wir somit einen Schnitt $\sigma_{i-1} : (\operatorname{im} \partial_i^D \subset D_{i-1}) \rightarrow D_i$ zu dem Retrakt $\partial_i^D : D_i \rightarrow \operatorname{im} \partial_i^D$ erhalten, sodass $D_i \cong \operatorname{im} \sigma_{i-1} \oplus \operatorname{im} \partial_{i+1}^D$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & \sigma_{i-1} & & \\
& & & & \curvearrowright & & \\
& & & & \partial_i^D & & \\
& & & & \curvearrowleft & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \partial_{i+1}^D & \hookrightarrow & \operatorname{im} \sigma_{i-1} \oplus \operatorname{im} \partial_{i+1}^D & \xrightarrow{\partial_i^D} & \operatorname{im} \partial_i^D \longrightarrow 0
\end{array}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\delta_i : D_i &\rightarrow D_{i+1} \\
\delta_i(a + b) &= \sigma_i(b)
\end{aligned} \tag{29}$$

wobei $a \in \operatorname{im} \sigma_{i-1}$ und $b \in \operatorname{im} \partial_{i+1}^D$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass δ eine Kettenkontraktion ist. Sei dazu $a' \in \operatorname{im} \partial_i^D$ mit $a = \sigma_{i-1}(a')$.

$$\begin{aligned}
(\delta_{i-1} \partial_i^D + \partial_{i+1}^D \delta_i)(b + a) &= \delta_{i-1} \partial_i^D(a) + \partial_{i+1}^D \delta_i(b) \\
&= \delta_{i-1}(a') + b \\
&= \sigma_{i-1}(a') + b \\
&= a + b
\end{aligned} \tag{30}$$

somit gilt $\delta_{i-1} \partial_i^D + \partial_{i+1}^D \delta_i = \operatorname{id}$. Per Definition von δ_i ist $\delta_{i+1} \delta_i = 0$ auch klar. □

Wir können somit eine Kettenkontraktion $\delta : C \rightarrow C$ durch passende Schnitte σ aus folgendem kommutativen Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+2} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+1} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_i & \xrightarrow{0} & \cdots \\
& & \nearrow \partial_{i+2} & & \nearrow \partial_{i+1} & & \nearrow \partial_i & & \nearrow \partial_{i-1} \\
& & \sigma_{i+1} & \oplus & \sigma_i & \oplus & \sigma_{i-1} & \oplus & \sigma_{i-2} \\
& & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow \\
\cdots & \xleftarrow{0} & \text{im } \sigma_i & \xleftarrow{0} & \text{im } \sigma_{i-1} & \xleftarrow{0} & \text{im } \sigma_{i-2} & \xleftarrow{0} & \cdots \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
\cdots & \xleftarrow{\delta_{i+1}} & C_{i+1} & \xleftarrow{\delta_i} & C_i & \xleftarrow{\delta_{i-1}} & C_{i-1} & \xleftarrow{\delta_{i-2}} & \cdots \\
& & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & & \xrightarrow{\partial_i} & & \xrightarrow{\partial_{i-1}}
\end{array}$$

Seien $C_{2*} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_{2i}$ und $C_{2*+1} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_{2i+1}$. Sei δ eine Kettenkontraktion auf (C, ∂) , dessen Existenz durch Proposition 2.8 garantiert ist. Sowohl ∂ als auch δ , welche a priori nur Familien von \mathbb{K} -Vektorraumhomomorphismen sind, induzieren Endomorphismen $\partial, \delta \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}}(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i)$ die wir auch mit ∂ und δ bezeichnen. Da $\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}$ eine selbst-angereicherte Kategorie ist, also $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}}$ -Mengen auch wiederum Objekte in $\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}$ sind, existiert der *Hodge-Dirac-Operator* $\partial + \delta \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}}(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i)$. Insbesondere induzieren ∂ und δ auch Homomorphismen

$$\begin{aligned}
(\partial + \delta)|_{C_{2*}} : C_{2*} &\xrightarrow{\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}} C_{2*+1} \\
(\partial + \delta)|_{C_{2*+1}} : C_{2*+1} &\xrightarrow{\mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fg}}} C_{2*}
\end{aligned} \tag{31}$$

durch Restriktion auf C_{2*} beziehungsweise C_{2*+1} .

Lemma 2.9 (H. Kammeyer [13]). *Die Abbildungen $(\partial + \delta)|_{C_{2*}}$ und $(\partial + \delta)|_{C_{2*+1}}$ sind Isomorphismen.*

Beweis: Wir haben, dass der Laplace-Operator

$$\begin{aligned}
\Delta_{2*} : C_{2*} &\rightarrow C_{2*} \\
\Delta_{2*} &:= (\partial + \delta)|_{C_{2*+1}} \circ (\partial + \delta)|_{C_{2*}} \\
&= \partial^2 + \partial\delta + \delta\partial + \delta^2 \\
&= \partial\delta + \delta\partial + \delta^2 \\
&= \text{id} + \delta^2
\end{aligned} \tag{32}$$

als auch analog $\Delta_{2*+1} := (\partial + \delta)|_{C_{2*}} \circ (\partial + \delta)|_{C_{2*+1}}$ unipotente Endomorphismen sind. Somit sind diese auch Isomorphismen und folglich auch $(\partial + \delta)|_{C_{2*+1}}$ und $(\partial + \delta)|_{C_{2*}}$. \square

Klar ist, dass unsere Basiswahl c von C Basen auf C_{2*} und C_{2*+1} induziert. Außerdem gilt $\dim C_{2*} - \dim C_{2*+1} = \chi(C) = 0$, da C azyklisch ist, wobei $\chi(C)$ die Euler-Charakteristik des Kettenkomplexes C ist. Somit können wir die Determinanten dieser Homomorphismen betrachten, aus welchen wir die Reidemeister-Torsion gewinnen.

Lemma 2.10. *Zu der Basis c von C existiert ein eindeutiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_i : C_i \times C_i \rightarrow \mathbb{K}$, sodass c_i eine Orthonormalbasis für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ ist, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Definition 2.11. Die Adjungierte $\partial_i^* : C_i \rightarrow C_{i+1}$ zu $\partial_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i$ ist definiert durch

$$\langle \partial_i x, y \rangle_i = \langle x, \partial_i^* y \rangle_{i+1}, \quad \forall x \in C_{i+1}, y \in C_i \quad 33$$

und wird das *Kodifferential* genannt.

Lemma 2.12. *Das Kodifferential ∂^* aus Definition 2.11 liefert die Kettenkontraktion aus Proposition 2.8.*

Beweis: Wir haben die orthogonale Zerlegung

$$\begin{aligned} C_i &= (\ker \partial_i) \oplus (\ker \partial_i)^\perp \\ &= \operatorname{im} \partial_{i+1} \oplus \operatorname{im} \partial_{i-1}^* \end{aligned} \quad 34$$

nach dem Projektionssatz, wobei $\operatorname{im} \partial_{i-1}^* = (\ker \partial_i)^\perp$ aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz folgt [13, S. 8] und $\ker \partial_i = \operatorname{im} \partial_{i+1}$ aus der Azyklität. Somit ist $\partial_i^\perp := \partial_i|_{\operatorname{im} \partial_{i-1}^*} : \operatorname{im} \partial_{i-1}^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \partial_i$ ein Isomorphismus und insbesondere ist $(\partial_i^\perp)^{-1}$ ein Schnitt zu ∂_i in der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{i+1} \hookrightarrow C_i \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} (\partial_i^\perp)^{-1} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \partial_i \end{array} \operatorname{im} \partial_i \longrightarrow 0$$

benötigt in dem Beweis von Proposition 2.8, womit ∂^* eine Kettenkontraktion ist. □

Proposition 2.13. *Es gilt $|\tau(C, c)| = \left| \det((\partial + \partial^*)|_{C_{2^{*+1}}}) \right|$*

Beweis: Durch die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \partial_i^\perp &:= \partial_i|_{\operatorname{im} \partial_{i-1}^*} : \operatorname{im} \partial_{i-1}^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \partial_i \\ (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} &:= \partial_i^*|_{\operatorname{im} \partial_{i+1}} : \operatorname{im} \partial_{i+1} \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \partial_i^* \end{aligned} \quad 35$$

erhalten wir aus der Zerlegung $C_i = \operatorname{im} \partial_{i+1} \oplus \operatorname{im} \partial_{i-1}^*$ mittels $\operatorname{im} (\partial_i^\perp)^{-1} = \operatorname{im} \partial_{i-1}^*$ die orthogonale Zerlegung $C_i = \operatorname{im} \partial_{i+1} \oplus \operatorname{im} (\partial_i^\perp)^{-1}$ und wir haben, dass das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+2} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+1} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_i & \xrightarrow{0} & \cdots \\
& & \nearrow \partial_{i+2} & & \nearrow \partial_{i+1} & & \nearrow \partial_i & & \nearrow \partial_{i-1} \\
& & \partial_{i+1}^* & \oplus & \partial_i^* & \oplus & \partial_{i-1}^* & \oplus & \partial_{i-2}^* \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
\cdots & \xleftarrow{0} & \text{im } \partial_i^* & \xleftarrow{0} & \text{im } \partial_{i-1}^* & \xleftarrow{0} & \text{im } \partial_{i-2}^* & \xleftarrow{0} & \cdots \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
\cdots & \xleftarrow{\frac{\partial_{i+1}^*}{\partial_{i+2}}} & C_{i+1} & \xleftarrow{\frac{\partial_i^*}{\partial_{i+1}}} & C_i & \xleftarrow{\frac{\partial_{i-1}^*}{\partial_i}} & C_{i-1} & \xleftarrow{\frac{\partial_{i-2}^*}{\partial_{i-1}}} & \cdots
\end{array}$$

zu folgendem kommutativen Diagramm wird

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+2} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_{i+1} & \xrightarrow{0} & \text{im } \partial_i & \xrightarrow{0} & \cdots \\
& & \nearrow \partial_{i+2}^\perp & & \nearrow \partial_{i+1}^\perp & & \nearrow \partial_i^\perp & & \nearrow \partial_{i-1}^\perp \\
& & (\partial_{i+2}^\perp)^{-1} & \oplus & (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} & \oplus & (\partial_i^\perp)^{-1} & \oplus & (\partial_{i-1}^\perp)^{-1} \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
\cdots & \xleftarrow{0} & \text{im } (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} & \xleftarrow{0} & \text{im } (\partial_i^\perp)^{-1} & \xleftarrow{0} & \text{im } (\partial_{i-1}^\perp)^{-1} & \xleftarrow{0} & \cdots \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
\cdots & \xleftarrow{\frac{\partial_{i+1}^*}{\partial_{i+2}}} & C_{i+1} & \xleftarrow{\frac{\partial_i^*}{\partial_{i+1}}} & C_i & \xleftarrow{\frac{\partial_{i-1}^*}{\partial_i}} & C_{i-1} & \xleftarrow{\frac{\partial_{i-2}^*}{\partial_{i-1}}} & \cdots
\end{array}$$

Betrachten wir alle Pfeile mit Ursprung aus der orthogonalen Zerlegung von C_i , so erhalten wir vier mögliche Matrixdarstellungen von $(\partial + \partial^*)|_{C_i}$.

1. Für $\text{im } (\partial_i^\perp)^{-1} \oplus \text{im } \partial_{i+1} \rightarrow \text{im } \partial_i \oplus \text{im } (\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$ durch

$$M_i^{(1)} := \begin{pmatrix} \partial_i^\perp & 0 \\ 0 & (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} \end{pmatrix} \quad 36$$

2. Für $\text{im } \partial_{i+1} \oplus \text{im } (\partial_i^\perp)^{-1} \rightarrow \text{im } \partial_i \oplus \text{im } (\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$ durch

$$M_i^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 & \partial_i^\perp \\ (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad 37$$

3. Für $\text{im } (\partial_i^\perp)^{-1} \oplus \text{im } \partial_{i+1} \rightarrow \text{im } (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} \oplus \text{im } \partial_i$ durch

$$M_i^{(3)} := \begin{pmatrix} (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} & 0 \\ 0 & \partial_i^\perp \end{pmatrix} \quad 38$$

4. Für $\text{im } \partial_{i+1} \oplus \text{im } (\partial_i^\perp)^{-1} \rightarrow \text{im } (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} \oplus \text{im } \partial_i$ durch

$$M_i^{(4)} := \begin{pmatrix} 0 & (\partial_{i+1}^\perp)^{-1} \\ \partial_i^\perp & 0 \end{pmatrix} \quad 39$$

Sei M nun eine beliebige dieser Matrizen. Als alternierende Multilinearform unterscheidet sich nur das Vorzeichen der Determinante unter diesen Möglichkeiten, wodurch $|\det(M)|$ wohldefiniert ist.

Auf $\text{im}(\partial_i^\perp)^{-1} \oplus \text{im} \partial_{i+1}$ haben wir durch c_i eine Basis. Analog erhalten wir durch c_{i-1} eine Basis $\pi_1(c_{i-1})$ von $\text{im} \partial_i$ durch die kanonische Projektion $\pi_1 : C_{i-1} \rightarrow \text{im} \partial_i$, sowie durch $\pi_2(c_{i+1})$ eine kanonische Basis von $\text{im}(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$ bezüglich der Projektion $\pi_2 : C_{i+1} \rightarrow \text{im}(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$. Da ∂_i^\perp und $(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$ Isomorphismen sind, können wir Proposition 2.3 doppelt anwenden und haben somit

$$|\det(M)| = [\pi_1(c_{i-1}) \oplus \pi_2(c_{i+1})/c_i] \quad 40$$

Wir können auch von $M_i^{(j)}$ mit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ den positiven Teil der Polarzerlegung

$$|M_i^{(j)}| = \sqrt{\left(M_i^{(j)}\right)^* M_i^{(j)}} \quad 41$$

betrachten, und erhalten

$$|M_i^{(j)}| = \begin{cases} \begin{pmatrix} |\partial_i^\perp| & 0 \\ 0 & |(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}| \end{pmatrix} & \text{wenn } j \in \{1, 4\} \\ \begin{pmatrix} |(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}| & 0 \\ 0 & |\partial_i^\perp| \end{pmatrix} & \text{wenn } j \in \{2, 3\} \end{cases} \quad 42$$

was wir beim Bestimmen von $|\det\left(\bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}+1} M_i^{(j)}\right)|$ nutzen möchten.

Wir können diese Matrixdarstellung auf $(\partial + \delta)|_{C_{2^{*+1}}} : C_{2^{*+1}} \rightarrow C_{2^1}$ durch $(\partial + \delta)|_{C_{2^{*+1}}} = \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}+1} (\partial + \partial^*)|_{C_i}$ fortsetzen. Wir haben für alle $i, j \in 2\mathbb{Z} + 1$ mit $i \neq j$, dass $\text{im}((\partial + \partial^*)|_{C_i}) = \text{im} \partial_i \oplus \text{im}(\partial_{i+1}^\perp)^{-1}$ disjunkt zu $\text{im}((\partial + \partial^*)|_{C_j}) = \text{im} \partial_j \oplus \text{im}(\partial_{j+1}^\perp)^{-1}$ ist.

Somit erhalten wir für eine konsistente Wahl von $M_{2^{*+1}}^{(j)}$ (entweder nur $M_{2^{*+1}}^{(1)}$, $M_{2^{*+1}}^{(2)}$, $M_{2^{*+1}}^{(3)}$ oder $M_{2^{*+1}}^{(4)}$) für $(\partial + \partial^*)|_{C_{2^{*+1}}}$ folgende Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} M_1^{(j)} & & \\ & M_3^{(j)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad 43$$

und somit gilt für den positiven Teil der Polarzerlegung dieser Matrix

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} M_1^{(j)} & & \\ & M_3^{(j)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right| &= \begin{pmatrix} |M_1^{(j)}| & & \\ & |M_3^{(j)}| & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} |\partial_1^\perp| & 0 & & \\ 0 & |(\partial_2^\perp)^{-1}| & & \\ & & |\partial_3^\perp| & 0 \\ & & 0 & |(\partial_3^\perp)^{-1}| \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} & \text{wenn } j \in \{1, 4\} \\ \begin{pmatrix} |(\partial_2^\perp)^{-1}| & 0 & & \\ 0 & |\partial_1^\perp| & & \\ & & |(\partial_3^\perp)^{-1}| & 0 \\ & & 0 & |\partial_2^\perp| \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} & \text{wenn } j \in \{2, 3\} \end{cases} \quad 44
\end{aligned}$$

Und somit haben wir für den Absolutbetrag der Determinanten

$$\begin{aligned}
\left| \det \begin{pmatrix} M_1^{(j)} & & \\ & M_3^{(j)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right| &= \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det \left| (\partial_i^\perp)^{(-1)^{i+1}} \right| \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det \left(|\partial_i|^\perp \right)^{(-1)^{i+1}} \quad 45
\end{aligned}$$

□

Aus diesem Beweis erhalten wir auch direkt folgende Aussage:

Proposition 2.14. *Die absolute Torsionsinvariante bezüglich einer Wahl von Orthonormalbasen $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eines endlichen azyklischen Kettenkomplexes von Hilberträumen (C, ∂) ist gegeben durch*

$$\tau(C, c) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det \left(|\partial_i|^\perp \right)^{(-1)^{i+1}} \quad 46$$

Die Bezeichnungen für ∂^* in Definition 2.11 als *Kodifferential* und den Abbildungen $(\partial + \delta)$ und $(\partial + \delta)^2$ als *Hodge-Dirac-Operator* und *Laplace-De Rham-Operator* entspringen hierbei der de Rham Kohomologie und Hodge Theorie mit dem L^2 -Skalarprodukt. [14, S. 798]

Nach Turaev kann man τ auch verallgemeinern und für Kettenkomplexe mit nicht trivialen Homologiemoduln definieren und über assoziative Ringe mit Eins mit der „invarianten Basiseigenschaft“ [12].

2.1 Reidemeister-Torsion

Die *Reidemeister-Torsion*, welche wir aus der algebraischen Torsion gewinnen, wurde 1935 von ihrem Namensgeber Reidemeister[5] für 3-Mannigfaltigkeiten eingeführt und zur Anwendung gebracht um *Linsenräume* in **Top** zu klassifizieren. Linsenräume sind beispielsweise in der kosmischen Topologie, einem Teilgebiet der

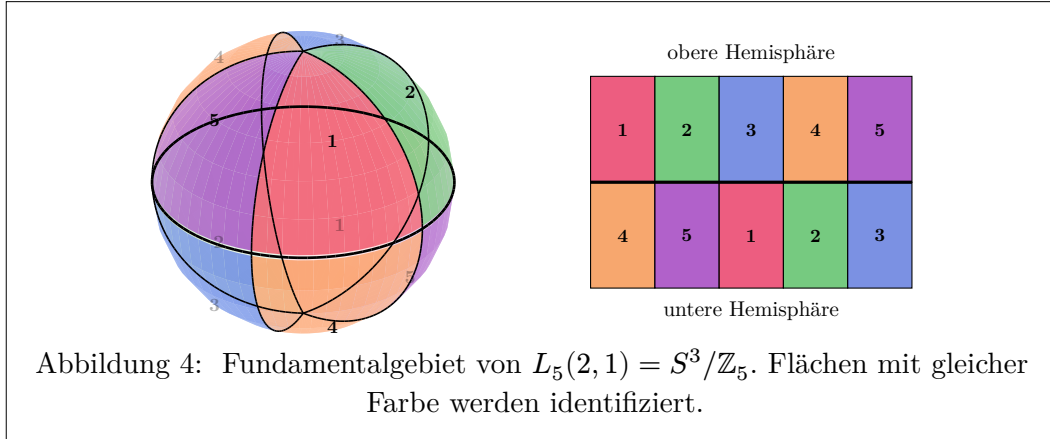
Physik von großem Interesse[15, S. 1]. Franz erweiterte die Reidemeister-Torsion auf höhere Dimensionen und nutzte sie um Linsenräume in allen Dimensionen zu klassifizieren[16], weshalb die Reidemeister-Torsion auch als *Reidemeister-Franz-Torsion* bezeichnet wird. Warum klassische Invarianten hier nicht ausreichen und wir die Reidemeister-Torsion brauchen um Linsenräume zu klassifizieren, werden wir im Folgenden erläutern.

Definition 2.15 (V. Turaev [12, Beispiel 5.8.1]). Für $m > 1$ und $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd zu m ist der *Linsenraum* $L_m(\ell_1, \dots, \ell_n)$ der Bahnenraum S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m unter der Wirkung gegeben durch

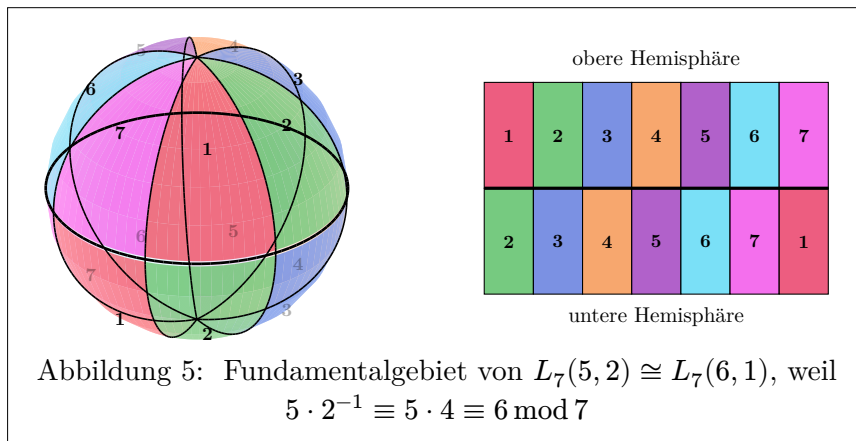
$$(\cdot) : \mathbb{Z}_m \curvearrowright S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$$

$$1. \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 e^{2\pi i \ell_1 / m} \\ \vdots \\ z_n e^{2\pi i \ell_n / m} \end{pmatrix} \quad 47$$

Für $n = 2$ ist $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ und da $S^3 \cong B^3 \cup_{\partial B^3 = S^2} B^3$ (Verklebung zweier 3-Bälle entlang ihres gemeinsamen Randes [17, Beispiel 2.43]), liefert ein Fundamentalgebiet der \mathbb{Z}_m -Wirkung einen 3-Ball B^3 mit Identifikationen auf $\partial B^3 = S^2$: Auf jeder Hemisphäre werden m Sektoren markiert und diese passend verklebt.



Das Problem der Linsenräume wird für $n = 2$ bereits ersichtlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\ell_2 = 1$ setzen: weil ℓ_2 und m teilerfremd sind existiert ein $\ell_2^{-1} \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $\ell_2^{-1} \ell_2 \equiv 1 \pmod{m}$. Insbesondere ist $(\cdot \ell_2^{-1}) := x \mapsto x \cdot \ell_2^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ wodurch die Bahnenräume von (\cdot) und $(\cdot) \circ (\cdot \ell_2^{-1})$ isomorph in **Top** sind, also $L_m(\ell_1, \ell_2) \cong L_m(\ell_1 \ell_2^{-1}, 1)$. Im folgenden sei $q = \ell_1 \ell_2^{-1}$.



Durch Poincaré-Dualität und das universelle Koeffiziententheorem gilt

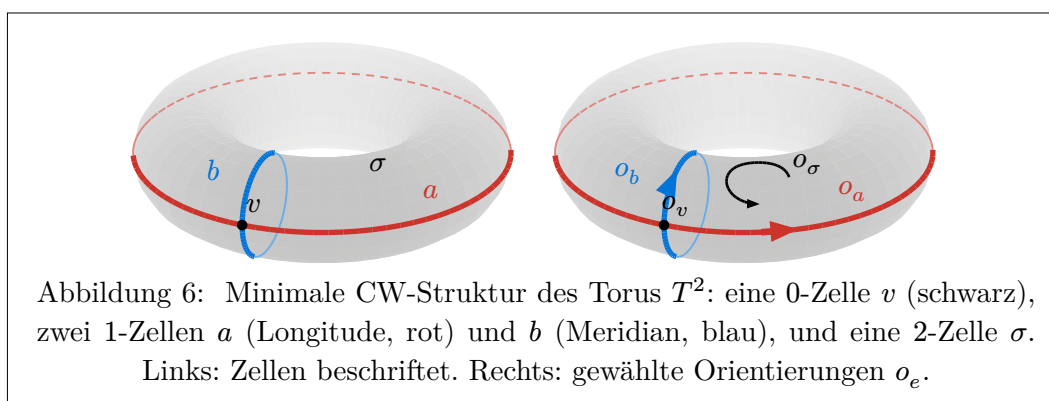
- $H_0(L_m(q, 1)) \cong \mathbb{Z}$,
- $H_1(L_m(q, 1)) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $H_2(L_m(q, 1)) \cong 0$
- $H_3(L_m(q, 1)) \cong \mathbb{Z}$

und somit kann q von den Homologiemoduln nicht erkannt werden. Dennoch kann man zeigen, dass $L_7(2, 1)$ und $L_7(1, 1)$ zwar homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph sind[12]. Die Homologiemoduln alleine reichen also nicht um Isomorphieklassen in \mathbf{Top} zu unterscheiden. Zudem ist nach Alexander[18] bereits seit 1919 bekannt, dass $L_5(2, 1)$ und $L_5(1, 1)$ nicht homotopieäquivalent sind und somit genügen die Homologiemoduln auch nicht um Isomorphieklassen in \mathbf{HoTop} zu charakterisieren. Um die Linsenräume zu klassifizieren wird somit ein anderes Werkzeug benötigt: die Reidemeister-Torsion.

Sei X ein endlicher, zusammenhängender CW-Komplex mit universeller Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und einer CW-Zerlegung, die wir auch mit X bezeichnen. Wir bezeichnen mit $S_n(X)$ die Menge der n -Zellen von X , also die Zusammenhangskomponenten von $X_n \setminus X_{n-1}$. Durch p erhalten wir auf \tilde{X} eine induzierte CW-Struktur. Es sei auch für jede Zelle $e \in S_n(X)$ eine Orientierung

$$o_e : H_n(e, \partial e; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \tag{48}$$

festgelegt, sodass $p|_e$ diese erhält. Durch Decktransformation wirkt $G := \pi_1(X)$ auf \tilde{X} zellulär und wir erkennen leicht, dass \tilde{X} ein G -CW-Komplex ist.



Wir nutzen hier die Definition von G -CW-Komplexen aus [13] mit diskreten Lie-Gruppen G , entgegen der ursprünglich von Bredon 1967 [19] für endliche Gruppen eingeführten und von Matumoto [20] und unabhängig von Illmann [21] für kompakte Lie-Gruppen erweiterten Definition. Unter einem G -CW-Komplex verstehen wir also:

Definition 2.16 (*H. Kammeyer [13, § 3.1, S. 35], W. Lück [22, § 1.2.1, S. 31]*). Sei G eine diskrete Gruppe. Ein G -CW-Komplex ist ein G -Raum X zusammen mit einer G -invarianten Filtrierung

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X \quad 49$$

mit $X = \operatorname{colim}_{n \geq 0} X_n$, sodass für jedes $n \geq 0$ ein G -äquivalentes Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I_n} G/H_i \times S^{n-1} & \xrightarrow{q_n} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow j_n \\ \bigoplus_{i \in I_n} G/H_i \times D^n & \xrightarrow{Q_n} & X_n \end{array}$$

existiert, wobei I_n eine Indexmenge ist und $H_i \leq G$ Untergruppen sind.

Hierbei heißt ein G -CW-Komplex *frei*, wenn alle Isotropiegruppen H_i trivial sind, *eigentlich*, wenn alle H_i endlich sind, und *endlich*, wenn die Gesamtzahl der äquivalenten Zellen endlich ist [13, § 3.1, S. 36].

Beispiel. Sei $D_8 = \operatorname{span}\{s, r \mid r^2 = s^4 = (rs)^2 = 1\}$ die Diedergruppe der Ordnung 16. Betrachte den (ungerichteten) Cayley-Graphen von D_8 bezüglich der Erzeugendenmenge $\{r, s\}$. Kleben wir an jeden Knoten des Cayley-Graphen eine 2-Sphäre S^2 an, so ergibt sich ein endlicher, eigentlicher, aber nicht freier D_8 -CW-Komplex X mit

- einer äquivalenten 0-Zelle,
- zwei äquivalenten 1-Zellen und
- einer äquivalenten 2-Zelle.

Dabei bilden

- die Knoten eine einzige D_8 -Bahn (freie äquivalente 0-Zelle),
- die s -Kanten eine freie äquivalente 1-Zelle,
- die r -Kanten eine äquivalente 1-Zelle mit Isotropiegruppe $\operatorname{span}\{r\} \cong \mathbb{Z}/2$,
- und die angeklebten 2-Sphären eine freie äquivalente 2-Zelle.

Die r -Kanten haben nicht-triviale Isotropie, weshalb die Wirkung eigentlich, aber nicht frei ist.

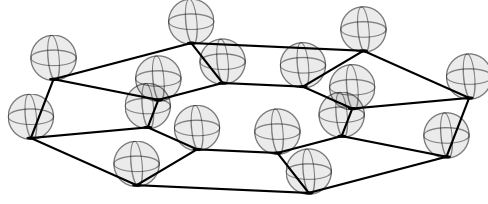


Abbildung 7: Der D_8 -CW-Komplex X : Cayley-Graph von D_8 bezüglich $\{r, s\}$ mit einer 2-Sphäre an jedem Knoten. Der Erzeuger s dreht den äußeren Ring im Uhrzeigersinn und den inneren Ring gegen den Uhrzeigersinn und r vertauscht die beiden Ringe.

Die Reidemeister-Torsion wurde ursprünglich nur für die universelle Überlagerung $G \simeq \tilde{X}$ definiert, jedoch könnten wir im Folgenden mit beliebigen G -CW Komplexen $G \simeq Y$ arbeiten.

Definition 2.17. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und G eine Gruppe. Der Gruppenring $R[G]$ ist der freie R -Modul mit Basis G , dessen Elemente die formalen endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad \lambda_g \in R \quad 50$$

(fast alle $\lambda_g = 0$) sind, versehen mit der durch R -bilineare Fortsetzung der Gruppenoperation definierten Multiplikation

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) &:= \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) \\ &= \sum_{f \in G} \left(\sum_{gh=f} \lambda_g \mu_h \right) f. \end{aligned} \quad 51$$

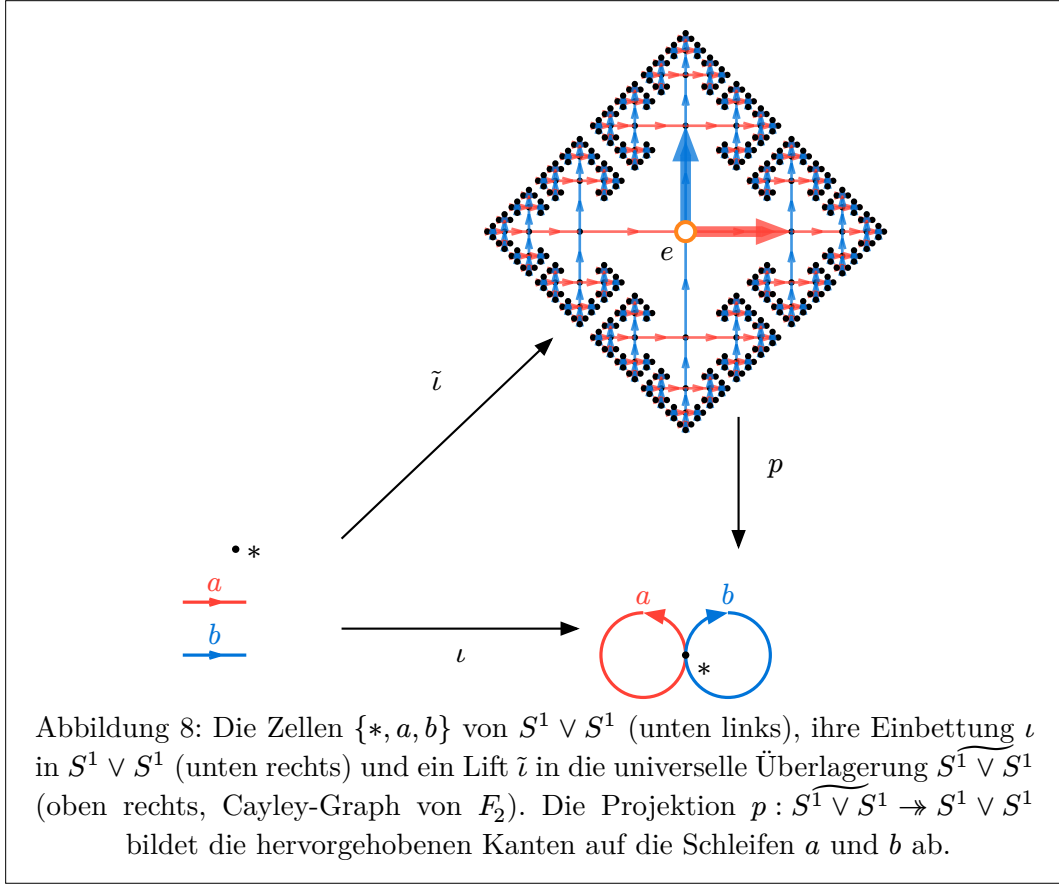
Da R kommutativ ist, macht die zentrale Einbettung $R \rightarrow R[G]$, $r \mapsto r \cdot 1_G$, den Gruppenring $R[G]$ zu einer assoziativen unitären R -Algebra, welche im Allgemeinen nichtkommutativ ist. Die kanonische Einbettung $G \rightarrow (R[G])^\times$, $g \mapsto 1_R \cdot g$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $\{e_i^n\}_{i \in I_n}$ die Menge der offenen n -Zellen von X . Durch einen lift $\tilde{\iota} : \{e_i^n\}_{i \in I_n} \rightarrow \tilde{X}$ wählen wir zu jedem e_i^n eine geliftete n -Zellen \tilde{e}_i^n in \tilde{X} , wodurch wir eine Basis von $C_n(\tilde{X})$ als freien $\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul endlichen Rangs

$$C_n(\tilde{X}) = \bigoplus_{i \in I_n} \mathbb{Z}[G] \tilde{e}_i^n \quad 52$$

erhalten, wobei die Differentiale $\partial_n : C_n(\tilde{X}) \rightarrow C_{n-1}(\tilde{X})$ durch Linearität über $\mathbb{Z}[G]$ definiert sind. Somit ist $C(\tilde{X})$ ein beschränkter Kettenkomplex von freien $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln endlichen Rangs.

Beispiel. Sei $X = S^1 \vee S^1$ mit $\pi_1(X) \cong F_2 = \text{span}\{a, b\}$. Die universelle Überlagerung \tilde{X} ist der Cayley-Graph von F_2 .



Um die algebraische Torsion dieses Kettenkomplexes nach Definition 2.4 berechnen zu können, muss $C(\tilde{X})$ azyklisch sein und ein Kettenkomplex von Vektorräumen über einem Körper sein. Jedoch ist $C(\tilde{X})$ nur ein Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln und nicht azyklisch, da bereits $H_0(C(\tilde{X})) = H_0(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Wir möchten dies beheben.

Sei nun \mathbb{K} ein Körper und $V \in \mathbb{K}\text{-Vect}^{\text{fr}}$ ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum zusammen mit einer Darstellung $\theta : G \curvearrowright V$. Durch θ wird V zu einem rechten $\mathbb{Z}[G]$ -Modul, indem wir für $v \in V$ und $\sum_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{Z}[G]$

$$v \cdot \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) := \sum_{g \in G} \lambda_g \theta(g^{-1})v \quad 53$$

definieren. Insbesondere ist V nun ein rechter $\mathbb{Z}[G]$ -Modul und ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Definition 2.18. Der *getwistete Kettenkomplex*

$$C(\tilde{X}; \theta) := V \otimes_{\text{Ch}(\mathbb{Z}[G]\text{-Mod})} C(\tilde{X}) \quad 54$$

von X bezüglich der Darstellung θ wird gebildet, indem wir das Tensorprodukt von $\mathbb{Z}[G]$ -Kettenkomplexen bilden und V dabei mittels θ als den rechten $\mathbb{Z}[G]$ -Kettenkomplex

$$\dots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\partial_1^V} V_0 \xrightarrow{\partial_0^V} V_{-1} \longrightarrow \dots$$

$$V_i := \begin{cases} V & \text{wenn } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 55$$

konzentriert in Grad 0 auffassen. Soweit es aus dem Kontext klar ist, wird in der Literatur $C(X; \theta)$ statt $C(\tilde{X}; \theta)$ geschrieben, vgl. [12, S. 31].

Nach dem Satz von Künneth können wir das Tensorprodukt von Kettenkomplexen weglassen und stattdessen komponentenweise tensorieren. Aus der Definition des Tensorproduktes für Kettenkomplexe folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (V \otimes_{\text{Ch}(\mathbb{Z}[G]\text{Mod})} C(\tilde{X}))_n &:= \bigotimes_{i+j=n} V_i \otimes C_j(\tilde{X}) \\ &= V \otimes_{\mathbb{Z}[G]\text{Mod}} C_n(\tilde{X}) \end{aligned} \quad 56$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial^{V \otimes C(\tilde{X})}(x \otimes y) &:= (\partial^V(x) \otimes y) + (-1)^{\deg(x)}(x \otimes \partial^{C(\tilde{X})}(y)) \\ &= x \otimes \partial^{C(\tilde{X})}(y) \end{aligned} \quad 57$$

wodurch wir also analog $C(X; \theta)$ als $C(\tilde{X})$ komponentenweise durch $V \otimes_{\mathbb{Z}[G]\text{Mod}}$ tensoriert betrachten könnten. Durch die \mathbb{K} -Vektorraumstruktur von V besitzt $C_n(X; \theta)$ auch eine linke \mathbb{K} -Wirkung und somit aufgrund der Kommutativität von \mathbb{K} ist $C(X; \theta)$ ein Kettenkomplex von \mathbb{K} -Vektorräumen. Da V endlich-dimensional und $C_n(\tilde{X})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$ -Modul endlichen Rangs ist, ist auch $C(X; \theta)$ ein Kettenkomplex von endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen. Mehr zu gewisteten Tensorprodukten findet sich in [23, S. 3].

Definition 2.19. Die *gewisteten Homologiemoduln* von \tilde{X} bezüglich der Darstellung θ sind

$$\begin{aligned} H_n(X; \theta) &= H_n(C(X; \theta)) \\ &= H_n(V \otimes_{\text{Ch}(\mathbb{Z}[G]\text{Mod})} C(\tilde{X})) \end{aligned} \quad 58$$

Sind diese Homologiemoduln alle 0, also ist $C(X; \theta)$ azyklisch, so können wir die Torsionsinvariante dieses Kettenkomplexes betrachten:

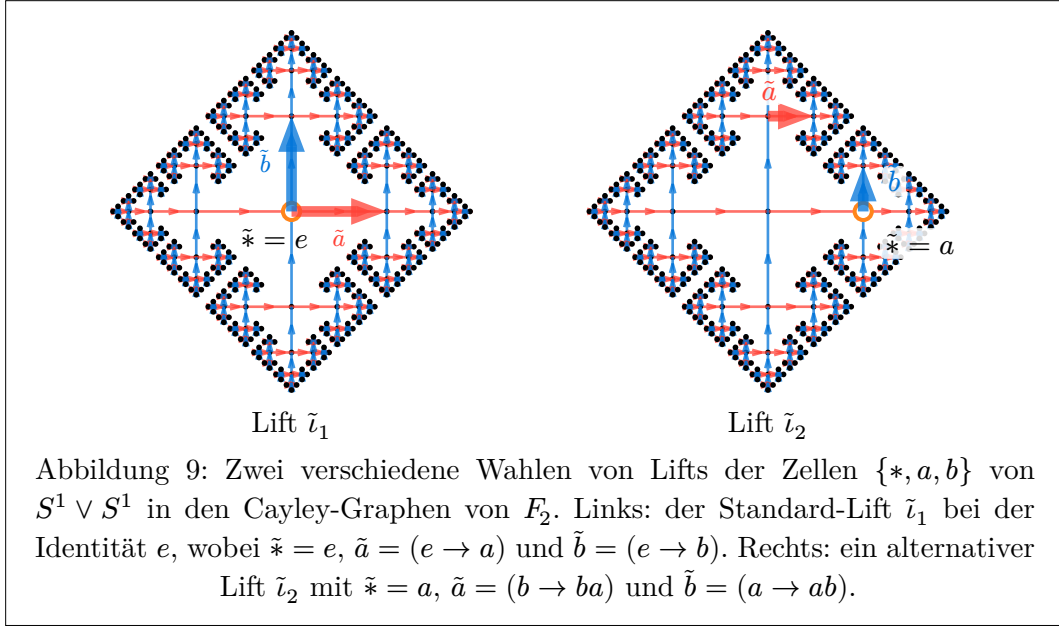
Definition 2.20. Die *Reidemeister-Torsion* ist definiert als

$$\tau_\theta(X, \tilde{e}) := \begin{cases} \tau(C(X; \theta), v \otimes \tilde{e}) & \text{wenn } H_n(X; \theta) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 59$$

wobei $(v_i)_{i=1, \dots, \dim V}$ eine Basis von V ist.

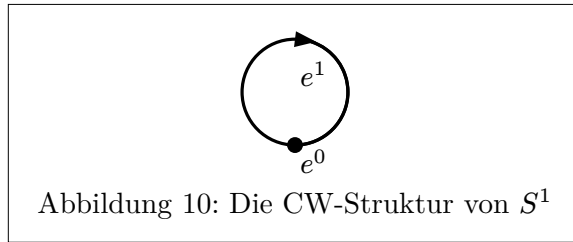
In der Literatur ist es auch üblich $\tau(X, \theta)$ zu verwenden, wobei hier die Wahl der Lifts unterschlagen wird. Doch woher stammt diese Konvention und in wie fern ist $\tau_\theta(X, \tilde{e})$ von unseren Wahlen (Orientierung der Zellen, Wahl der Lifts und der Darstellung) abhängig?

Hätten wir eine *andere Orientierung* (also eine andere Indizierung nach [17, Seite 103]) der Zellen gewählt, sagen wir für ein e_i^n , so hätte auch \tilde{e}_i^n die entgegengesetzte Orientierung, wodurch $\tau_\theta(X, \tilde{e})$ nach Korollar 2.7 mit (-1) multipliziert werden würde. Und hätten wir einen *anderen Lift* $g\tilde{e}^n$ für ein $g \in G$ gewählt, so hätte dies $\tau_\theta(X, \tilde{e})$ mit $\det(\theta(g))^{(-1)^n}$ nach Proposition 2.6 multipliziert.

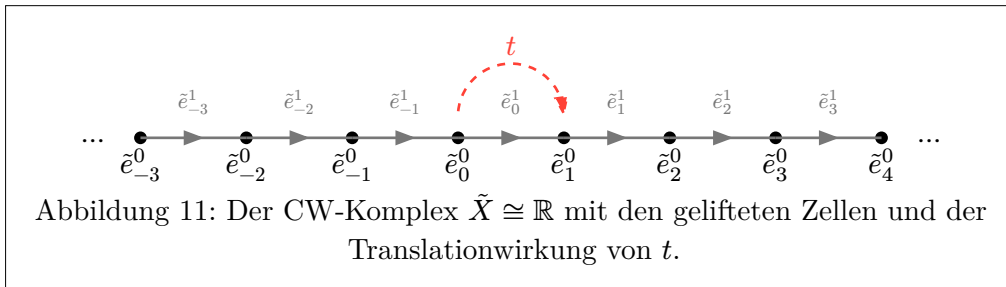


Ohne den Parameter \tilde{e} ist somit $\tau(X, \theta)$ nur bis auf Multiplikation mit $\pm \det(\theta(G))$ wohldefiniert, wobei Turaev [12] zeigte, dass man durch eine *Euler-Struktur* diese Unbestimmtheit bis auf Vorzeichen beseitigen kann.

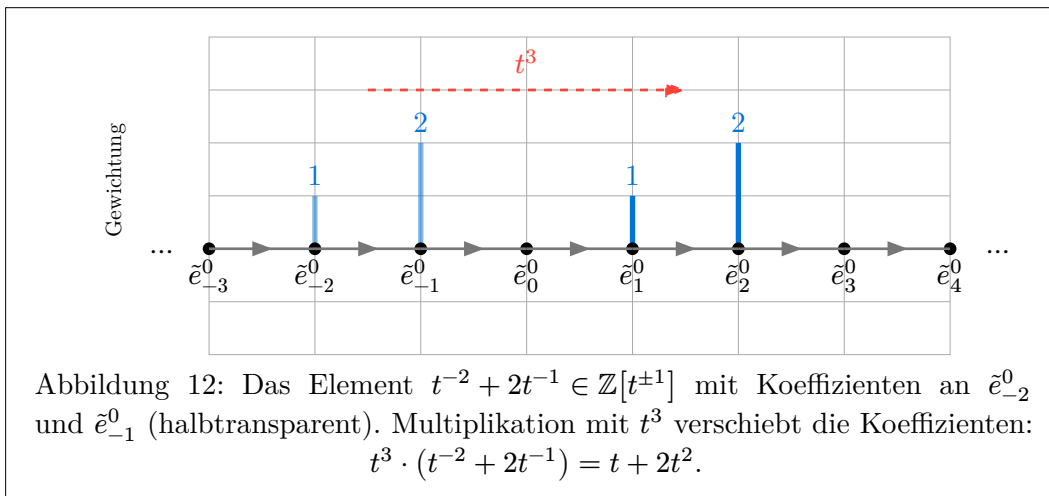
Beispiel (v. Turaev [12], L. I. Nicolaescu [24]). Sei $X = S^1$ mit der CW-Struktur bestehend aus einer 0-Zelle e^0 und einer 1-Zelle e^1 .



Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1) = \text{span}\{t\} \cong \mathbb{Z}$ wirkt auf der universellen Überlagerung $\tilde{X} \cong \mathbb{R}$ durch $t^n \cdot x = x + n$. Durch Liften erhalten wir je eine 0-Zelle \tilde{e}_k^0 und eine 1-Zelle \tilde{e}_k^1 pro $k \in \mathbb{Z}$.



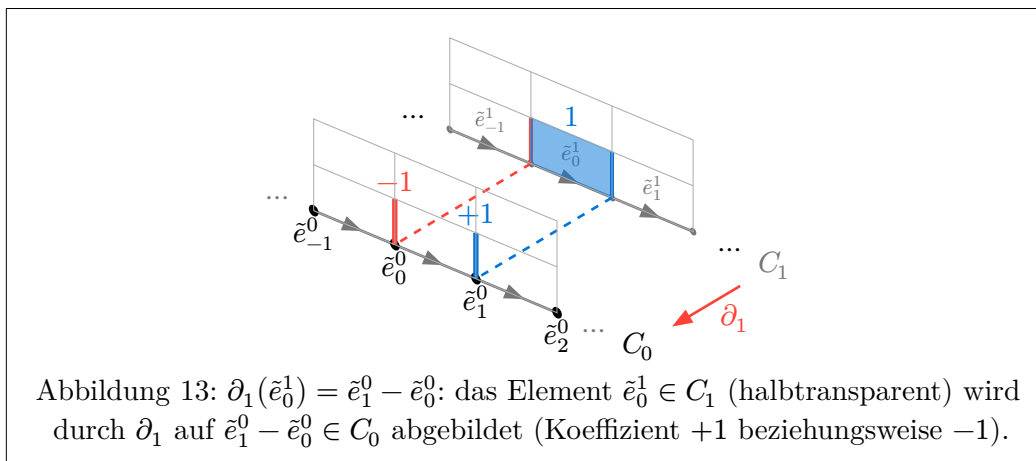
Somit haben wir $C_0(\tilde{X}) = \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] \cdot \tilde{e}^0$ und $C_1(\tilde{X}) = \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] \cdot \tilde{e}^1$, wobei der Gruppenring $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] = \mathbb{Z}[\text{span}\{t\}]$ der Ring der Laurent-Polynome $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist.



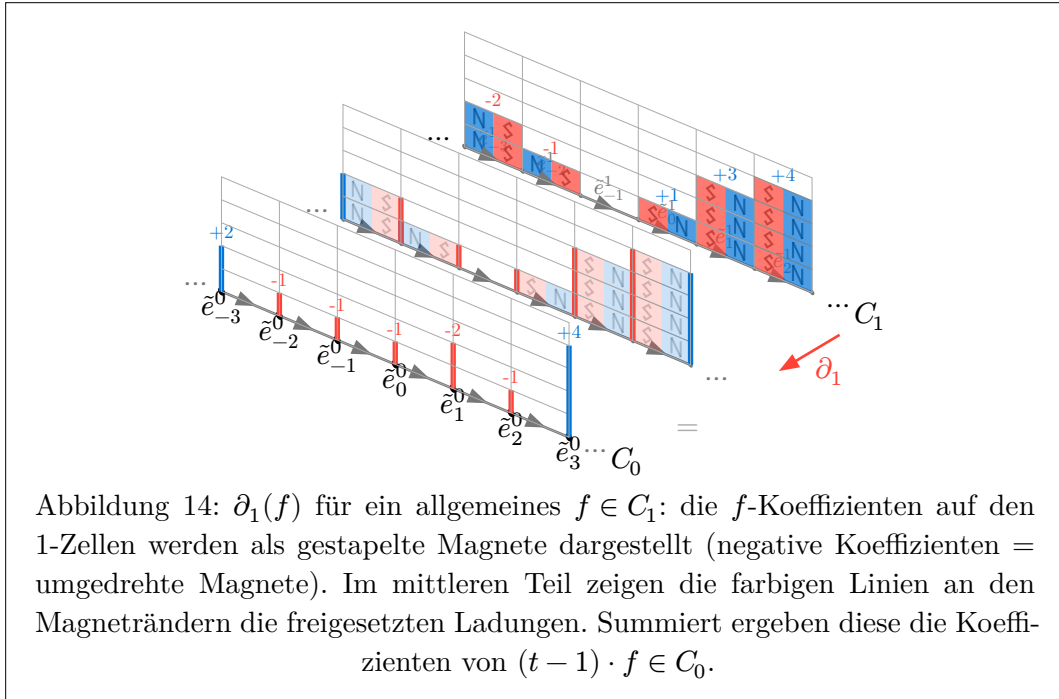
Der zelluläre Kettenkomplex $C(\tilde{X})$ über $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist daher

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \cdot \tilde{e}^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \cdot \tilde{e}^0 \longrightarrow 0$$

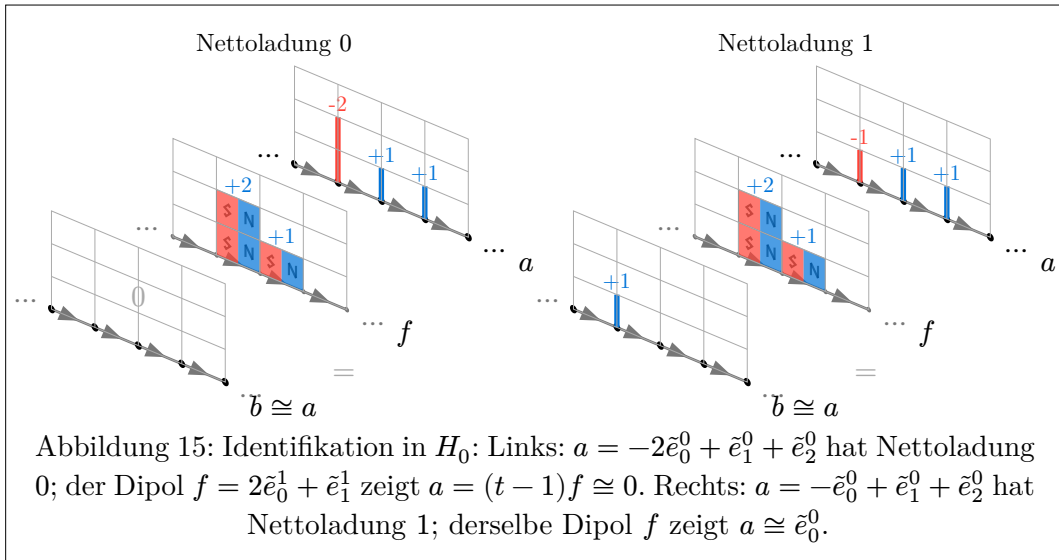
mit $\partial_1(\tilde{e}^1) = t \cdot \tilde{e}^0 - \tilde{e}^0 = (t - 1)\tilde{e}^0$ und $\partial_0 \tilde{e}^0 = 0$.



Dieser Komplex ist nicht azyklisch, da $H_0(C(\tilde{X})) = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t - 1) \cong \mathbb{Z} \neq 0$. Wie können wir den Defekt \mathbb{Z} entfernen? Betrachten wir dafür ∂_1 etwas näher: Fassen wir die 0-Zellen \tilde{e}_k^0 als *Punktladungen* und die 1-Zellen \tilde{e}_k^1 als *magnetische Dipole* (Stabmagnete) auf, deren Orientierung durch den Pfeil der Zelle gegeben ist. Der Randoperator ∂_1 berechnet dann aus einer Verteilung von Magnetstärken die resultierende Ladungsverteilung: jeder Magnet setzt an seinem Ende eine positive Ladung (+, oder „N“ für Nord) und an seinem Anfang eine negative Ladung (-, oder „S“ für Süd) frei.



Geometrisch betrachtet stellt wie in Abbildung 14 zu sehen $\cdot (t-1)$ einen Differenzenoperator dar. Indem wir durch das Hauptideal $(t-1)$ modulieren identifizieren wir nun Ladungen $a, b \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, wenn eine Ableitung $(t-1)f$ mit $a-b = (t-1)f$ existiert, also ein Dipol f existiert, dessen Randladungen genau die Differenz $a-b$ ergeben.



Aus Abbildung 15 ist nun auch der Isomorphismus

$$\frac{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}{(t-1)} \cong \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i t^i \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i$$

60

klar: In $H_0(C(\tilde{X})) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t-1) \cong \mathbb{Z}$ betrachten wir Ladungsverteilungen nur noch bis auf ihre *Nettoladung* $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir jede Ladungsverteilung durch einen geeigneten Dipol auf \tilde{e}_0^0 konzentrieren, das heißt $H_0 \cong \mathbb{Z}\tilde{e}_0^0$. Gäbe es nun ein $x \in C_1$ mit $\partial_1(x) = \tilde{e}_0^0$, so wäre $H_0 = 0$. Wie wir jedoch in Abbildung 13 sehen können, gibt es kein solches Element $x \in C_0$.

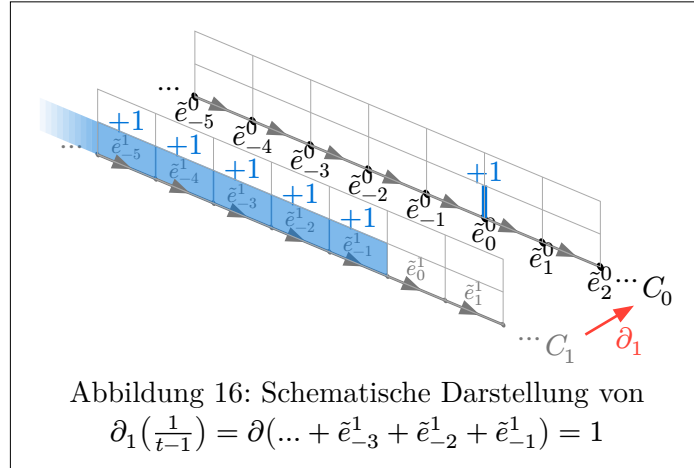
Lokalisieren wir jedoch $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ bei $(t-1)$ zu $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]_{(t-1)}$, so fügen wir unser gewünschtes Element x durch rein algebraische Mittel zu $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ hinzu, sodass $\partial_1(x) = (t-1)x = 1$. Wenn wir nun $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]_{(t-1)}$ mit $(t-1)$ modulieren ist offensichtlich, dass $\frac{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]_{(t-1)}}{(t-1)} \cong 0$ und wir haben den azyklischen Kettenkomplex

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]_{(t-1)} \cdot \tilde{e}^1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]_{(t-1)} \cdot \tilde{e}^0 \longrightarrow 0$$

Wie sieht ein solches Element $(t-1)^{-1}$ jedoch in C_1 aus? Betrachten wir dafür die wohlbekanntete geometrische Reihe aus der Analysis und zweckentfremden sie etwas:

$$\frac{1}{t-1} = \frac{t^{-1}}{1-t^{-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k} = t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + \dots \quad 61$$

Geometrisch ist es dann klar, dass $\partial((t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + \dots)\tilde{e}_0^1) = 1\tilde{e}_0^0$, wie wir in Abbildung 16 sehen können.



Unser gesuchtes x ist in unserer Analogie somit ein Monopol, welchen wir erhalten, indem wir den ungewollten Südpol unendlich weit weg bewegen.

Besser noch, gehen wir über zu $\text{frak}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) = \mathbb{Q}(t)$, haben wir auch einen Körper und damit ist $V = \mathbb{Q}(t)$ ein 1-dimensionaler $\mathbb{Q}(t)$ -Vektorraum mit der durch $\theta: \text{span}\{t\} \hookrightarrow \mathbb{Q}(t)^\times$ induzierten rechten $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modulstruktur nach Gleichung 53. Der getwistete Kettenkomplex $C(X; \theta) = \mathbb{Q}(t) \otimes_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]} C(\tilde{X})$ ist

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(t) \xrightarrow{1 \mapsto t-1} \mathbb{Q}(t) \longrightarrow 0$$

Im Unterschied zu $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, in dem $(t-1)$ kein Inverses hat, ist $(t-1) \in \mathbb{Q}(t)^\times$ eine Einheit. Die Abbildung $\mathbb{Q}(t) \rightarrow \mathbb{Q}(t), x \mapsto (t-1) \cdot x$ ist somit ein Isomorphismus und der getwistete Komplex ist azyklisch.

Die Torsion ergibt sich als die alternierende Determinante der Randabbildungen (Proposition 2.14):

$$\tau(S^1, \theta) = \det(t-1)^{(-1)^{1+1}} = (t-1)^{-1} \in \mathbb{Q}(t)^*/(\pm t). \quad 62$$

Beispiel (v. Turaev [12], [25]). Sei M eine n -dimensionale *rationale Homologiesphäre*, also $H_*(M; \mathbb{Q}) \cong H_*(S^n; \mathbb{Q})$, und θ die triviale Darstellung. Dann gilt

$$\tau(M, \theta) = \prod_{i=1}^{n-1} |H_i(M, \mathbb{Z})_{\text{tors}}|^{(-1)^i}, \quad 63$$

wobei $|H_i(M, \mathbb{Z})_{\text{tors}}|$ die Ordnung der (endlichen) Torsionsgruppe $H_i(M, \mathbb{Z})$ bezeichnet. Die Reidemeister-Torsion bezüglich der trivialen Darstellung hängt also direkt mit der *Torsion* (im algebraischen Sinne) der Homologiegruppen zusammen.

Beweis: Siehe [12, §5]. □

Proposition 2.21 (J. Milnor [26]). Sei $K \subset S^3$ ein Knoten und $\theta : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \mathbb{Q}(t)$ die durch die Abelianisierung $\text{ab} : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow H_1(S^3 \setminus K) = \mathbb{Z}$ via $\gamma \mapsto t^{\text{ab}(\gamma)}$ gegebene Darstellung. Dann ist

$$\Delta_K(t) = \frac{t-1}{\tau(S^3 \setminus K, \theta)} \quad 64$$

das Alexanderpolynom von K .

Beweis: Siehe [26] und [27]. □

Eine kurze tabellarische Aufarbeitung einiger bekannter Reidemeister-Torsionen findet sich hier:

Raum	Reidemeister-Torsion	Quelle
$T^n = (S^1)^n$	$\tau(T^n, \theta) = 1$	[24, Bsp. 2.6]
$S^1 \times X$, mit $\chi(X) \neq 0$	$\tau(S^1 \times X, \theta) = (t-1)^{-\chi(X)}$	[24, Bsp. 2.7]
Linsenraum $L(p, q)$, $p \geq 2$	$\tau(L(p, q), \theta) = (1-t)^{-1}(1-t^r)^{-1}$ wobei $rq \equiv 1 \pmod{p}$	[24, Bsp. 2.9] [12, Thm. 10.6]
$S^1 \times \Sigma_g$	$\tau(S^1 \times \Sigma_g, \theta) = \begin{cases} (1-t)^{-2} & \text{für } g=0 \\ 1 & \text{für } g=1 \\ (\varphi-1)^{2g-2} & \text{für } g \geq 2 \end{cases}$	[24, Bsp. 2.43]
geschl. orient. 3-Man. M , $b_1(M) \geq 1$	$\tau(M, \theta) = \begin{cases} \Delta_M/(t-1)^2 & \text{für } b_1=1 \\ \Delta_M & \text{für } b_1 \geq 2 \end{cases}$	[12, Thm. 14.12]

Tabelle 1: Reidemeister-Torsionen ausgewählter Räume. Hierbei ist θ jeweils eine nicht-triviale Darstellung.

Der Tradeoff von $\tau_\theta(X, \tilde{e})$ zu $\tau(X, \theta)$ ist nun geklärt. Doch als Topologen möchten wir ohne Abhängigkeit einer Darstellung Informationen über unseren Raum X haben. Die Frage stellt sich also: Gibt es eine Möglichkeit um von $\tau(X, \theta)$ zu $\tau(X)$

überzugehen, also eine Reidemeister-Torsion zu definieren, ohne explizite Angabe einer Darstellung? Und welchen Tradeoff müssen wir dafür eingehen?

Die Antwort hierauf ist, dass wenn wir nur noch orthogonale Darstellungen zulassen, so ist die Reidemeister-Torsion bis auf Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Darstellung: Betrachten wir zwei Darstellungen $\theta : G \curvearrowright V$ und $\theta' : G \curvearrowright V$, so erhalten wir zwei getwistete Kettenkomplexe $C(X; \theta)$ und $C(X; \theta')$ von \mathbb{K} -Vektorräumen mit $A \in \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathbb{Z}[G] \text{Mod})}(C(X; \theta), C(X; \theta'))$ gegeben durch die Basiswechselabbildungen

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & C_{i+1}(X; \theta) & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(X; \theta) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(X; \theta) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\
& & \downarrow A_{i+1} & & \downarrow A_i & & \downarrow A_{i-1} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_{i+2}} & C_{i+1}(X; \theta') & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(X; \theta') & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(X; \theta') & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots
\end{array}$$

und somit gilt nach Proposition 2.6

$$\tau(C(\tilde{X}; \theta), \tilde{e}) = \tau(C(\tilde{X}; \theta'), \tilde{e}) \cdot \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det(A_i)^{(-1)^{i-1}} \quad 65$$

Gleichheit bis auf Vorzeichen besteht somit insbesondere wenn jeweils $\det(A_i) = \pm 1$. Wir haben bereits für $C(\tilde{X}; \theta)$ und $C(\tilde{X}; \theta')$ per Konstruktion \tilde{e} als eine gemeinsame Basis. Nach Lemma 2.10 existiert somit für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ auf $C_i(\tilde{X}; \theta)$, bezüglich dessen \tilde{e}_i eine Orthonormalbasis bildet. Sind die A_i Isometrien bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, also orthogonale Abbildungen, so gilt $\det(A_i) = \pm 1$ und somit $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \det(A_i)^{(-1)^{i-1}} = \pm 1$. Es ist klar, dass wenn $\theta : G \rightarrow O(V)$ und $\theta' : G \rightarrow O(V)$ orthogonale Darstellungen sind, die A_i solche orthogonalen Abbildungen sind. Somit ist dann auch $|\tau(X, \theta)| = |\tau(X, \theta')|$, ganz unabhängig der Orientierungswahl und der orthogonalen Darstellungen.

Definition 2.22. Existiert eine orthogonale Darstellung $\theta : G \rightarrow O(V)$, so ist die absolute Reidemeister-Torsion wohldefiniert als

$$\tau(X) := |\tau(X, \theta)| \quad 66$$

und mittels Proposition 2.14 haben wir

$$\tau(X) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det(|\partial_i|^\perp)^{(-1)^{i+1}} \quad 67$$

Insbesondere ist die Reidemeister-Torsion unabhängig von der Wahl der CW-Zerlegung einer Mannigfaltigkeit und somit eine Invariante dieser zugrunde liegenden (bei fester Darstellung und Liftwahl):

Proposition 2.23 (v. Turaev [12, §8 Thm. 8.8, §9 Cor. 9.2, §14 S. 70]). Sei M eine kompakte, zusammenhängende PL-Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe $\pi = \pi_1(M)$ und sei $\theta : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow A$ ein Ringhomomorphismus in einen Ring A wie in Definition 2.4 mit $H_*(M; A) = 0$. Dann ist die Reidemeister-Torsion

$$\tau_\theta(M) \in K_1(A)/(\pm\theta(\pi)) \quad 68$$

unabhängig von der Wahl der PL-Triangulierung (und damit der CW-Zerlegung) von M .¹

Beweis: Seien X und X' zwei PL-Triangulierungen von M . Da M eine PL-Mannigfaltigkeit ist, besitzen X und X' eine gemeinsame PL-Unterteilung X'' [12, §14, S. 69]. Nach [12, Thm. 8.8, S. 42] sind die Identitätsabbildungen $\text{id} : X \rightarrow X''$ und $\text{id} : X' \rightarrow X''$ einfache Homotopieäquivalenzen. Nach [12, Cor. 9.2, S. 43] gilt für jede einfache Homotopieäquivalenz $f : Y \rightarrow Z$ endlicher zusammenhängender CW-Komplexe mit $H_*(Z; \theta) = 0$, dass $\tau_\theta(Y) = \tau_\theta(Z)$. Angewandt auf $f = \text{id} : X \rightarrow X''$ und $f = \text{id} : X' \rightarrow X''$ folgt

$$\tau_\theta(X) = \tau_\theta(X'') = \tau_\theta(X'). \quad 69$$

□

2.2 Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln und Von-Neumann-Algebren

Das Problem der Reidemeister-Torsion ist nach Definition 2.22 die Forderung der Existenz einer orthogonalen Darstellung. Woher sollten wir wissen, ob es zu einem G -CW Komplex eine solche gibt? Die Funktionalanalysis liefert uns hier eine Antwort.

Für eine diskrete, abzählbare Gruppe G kommt diese bereits mit einer natürlichen Wahl von unitärer Darstellung auf einen Vektorraum: der *linksregulären* und der *rechtsregulären Darstellung* $\cdot \lll \cdot$ und $\cdot \ggg \cdot$ auf dem Hilbertraum $\ell^2(G)$ der quadratsummierbaren Funktionen $G \rightarrow \mathbb{C}$.

Ein übergreifendes Thema ist jedoch, dass für jedes Gadget welches wir gewinnen, ein Preis gezahlt werden muss: Einerseits erhalten wir unsere gesuchte unitäre Darstellung, andererseits gehen wir von \mathbb{R} zu \mathbb{C} über und $\ell^2(G)$ ist im Allgemeinen kein endlich dimensionaler Vektorraum mehr. Unsere Werkzeuge wie Determinanten funktionieren jedoch nur für Endomorphismen endlich dimensionaler Vektorräume. Unsere Aufgabe ist es nun, diese der ℓ^2 -Situation anzupassen.

Wir entwickeln zunächst die *Gruppen-von-Neumann-Algebra* $\mathcal{R}(G)$ und $\mathcal{L}(G)$, die als Endomorphismenalgebra der Hilbert- G -Moduln dient, und definieren auf ihr die *Von-Neumann-Spur*, die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spur auf endlich-dimensionale Vektorräume ist, um damit die *Fuglede-Kadison-Determinante* für Operatoren auf Hilbert- G -Moduln zu definieren, die die gewöhnliche Determinante für endlich-dimensionale Vektorräume verallgemeinert.

2.2.1 Gruppenalgebra, $\ell^2(G)$ und reguläre Darstellungen

Definition 2.24 (*H. Kammeyer [13]*). Die *Gruppenalgebra* $\mathbb{C}[G]$ ist der durch Skalarerweiterung aus dem Gruppenring (Definition 2.17) gewonnene \mathbb{C} -Vektorraum

$$\mathbb{C}[G] := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G], \quad 70$$

Sie trägt das *kanonische Skalarprodukt*

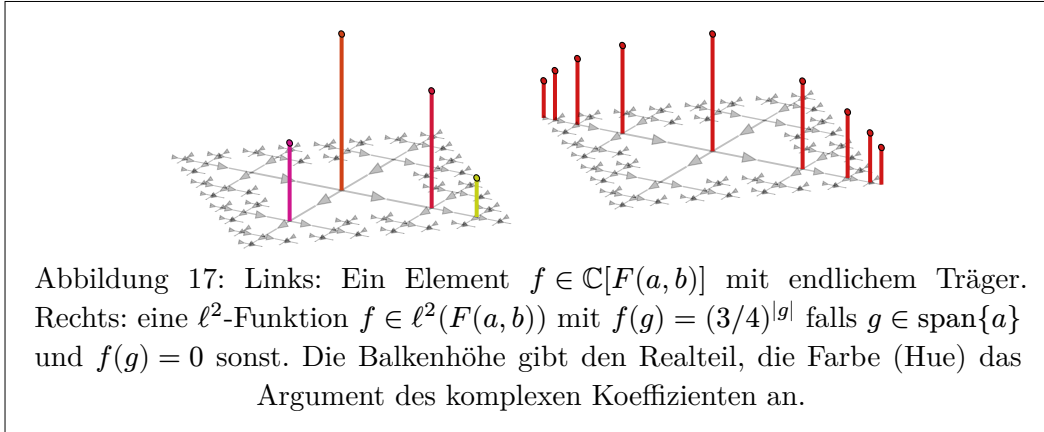
$$\left\langle \sum_{g \in G} c_g g, \sum_{g \in G} d_g g \right\rangle := \sum_{g \in G} c_g \bar{d}_g, \quad 71$$

¹Hierbei bezeichnet $K_1(A) := \text{GL}(A)/E(A)$ die erste algebraische K -Gruppe von A , wobei $\text{GL}(A) = \text{colim}_n \text{GL}_n(A)$ und $E(A) = \langle I + r \cdot E_{ij} \mid i \neq j, r \in R \rangle \leq \text{GL}(A)$ die von Elementarmatrizen erzeugte Untergruppe ist. Für einen Körper \mathbb{K} ist $K_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$ via der Determinante; somit verallgemeinert $K_1(A)$ die Rolle von \det auf beliebige Ringe. Siehe [12, §7] für eine Einführung.

wozu G offensichtlich eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}[G]$ bildet. Die *Hilbertraumvollständigung* von $\mathbb{C}[G]$ ist der Hilbertraum

$$\ell^2(G) := \left\{ \sum_{g \in G} c_g g : \sum_{g \in G} |c_g|^2 < \infty \right\} \quad 72$$

dementsprechend auch mit Orthonormalbasis $G \subset \ell^2(G)$.



Wie in der Funktionalanalysis üblich bezeichnet $\mathcal{B}(H)$ die Banachalgebra (das heißt eine vollständige normierte Algebra, deren Norm submultiplikativ ist) der beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H .

Definition 2.25 (*H. Kammeyer [13]*). Die *linksreguläre Darstellung*

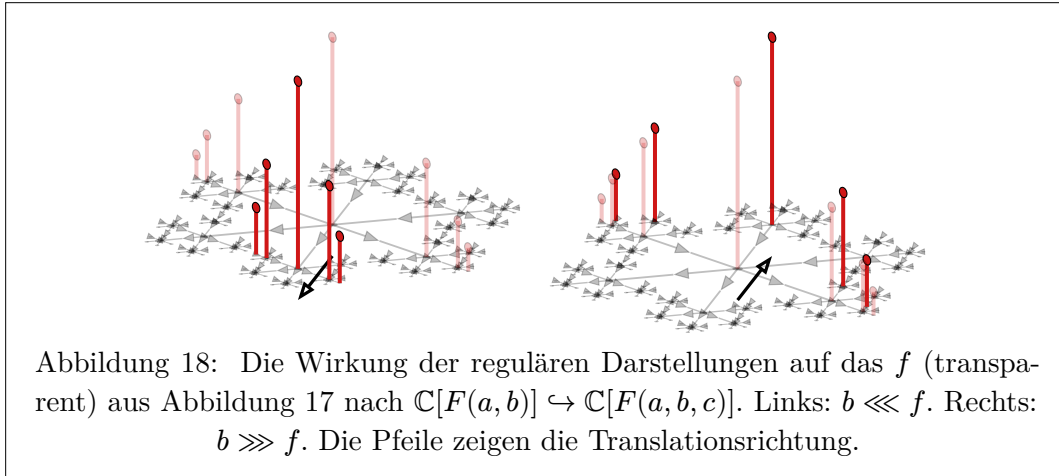
$$\begin{aligned} \cdot \lll \cdot &: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G)) \\ h \lll \cdot &:= g \mapsto hg \end{aligned} \quad 73$$

und die *rechtsreguläre Darstellung*

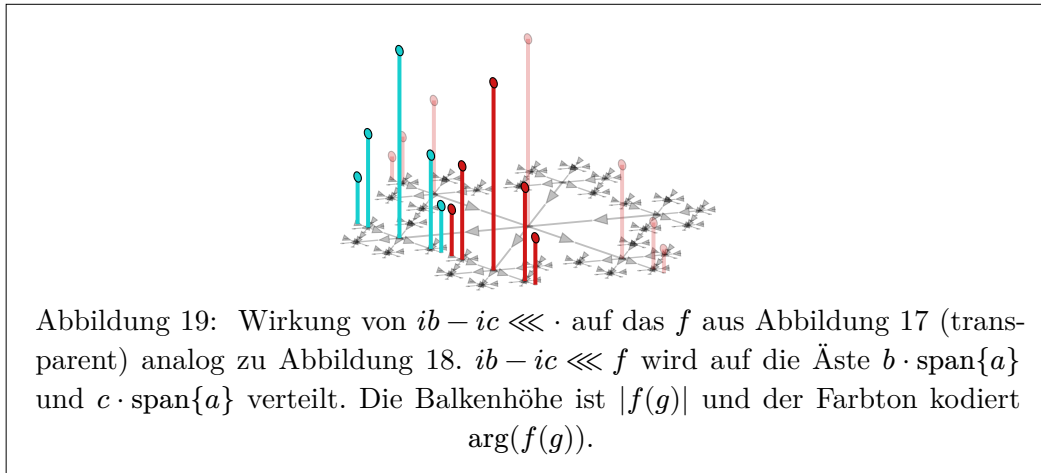
$$\begin{aligned} \cdot \ggg \cdot &: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G)) \\ h \ggg \cdot &:= g \mapsto gh^{-1} \end{aligned} \quad 74$$

sind die durch auf Basisvektoren $g \in G$ definierten und linear fortgesetzten Einbettungen. Beide sind unitäre Darstellungen, die $\ell^2(G)$ zu einem $\mathbb{C}[G]$ -Bimodul machen.

Wir möchten diese an einigen Beispielen betrachten, um ein Gefühl für diese Wirkungen zu bekommen.



Da die Elemente von $\mathbb{C}[G]$ Linearkombinationen von Gruppenelementen sind, verteilen $\cdot \lll \cdot$ und $\cdot \ggg \cdot$ diese linear auf die entsprechenden Äste des Cayley-Graphen, wie in Abbildung 18 zu sehen ist. In Abbildung 19 können wir erkennen, wie wir f auf gewisse Weise „duplizieren“ und auf die Äste verschieben können.



2.2.2 Gruppen-von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(G)$

Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\lll} &:= \{T \in \mathcal{B}(\ell^2(G)) : T(h \lll \cdot) = h \lll (T \cdot) \quad \forall h \in G\}, \\ \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\ggg} &:= \{T \in \mathcal{B}(\ell^2(G)) : T(h \ggg \cdot) = h \ggg (T \cdot) \quad \forall h \in G\} \end{aligned} \quad 75$$

sind die beschränkten und bezüglich der linksregulären, beziehungsweise rechtsregulären Darstellung äquivarianten Operatoren. Sie sind *von-Neumann-Algebren*: Zwei gleichwertige Charakterisierungen (über den Bikommutantensatz und über Abschlusseigenschaften) sind in der Literatur üblich. Betrachten wir jedoch vorerst ein Beispiel um warm zu werden:

Beispiel (H. Kammeyer [13]). Eines der relevantesten Beispiele ist $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))^{\lll} \cong L^\infty(S^1)$. Durch die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} L^2[-\pi, \pi] \quad 76$$

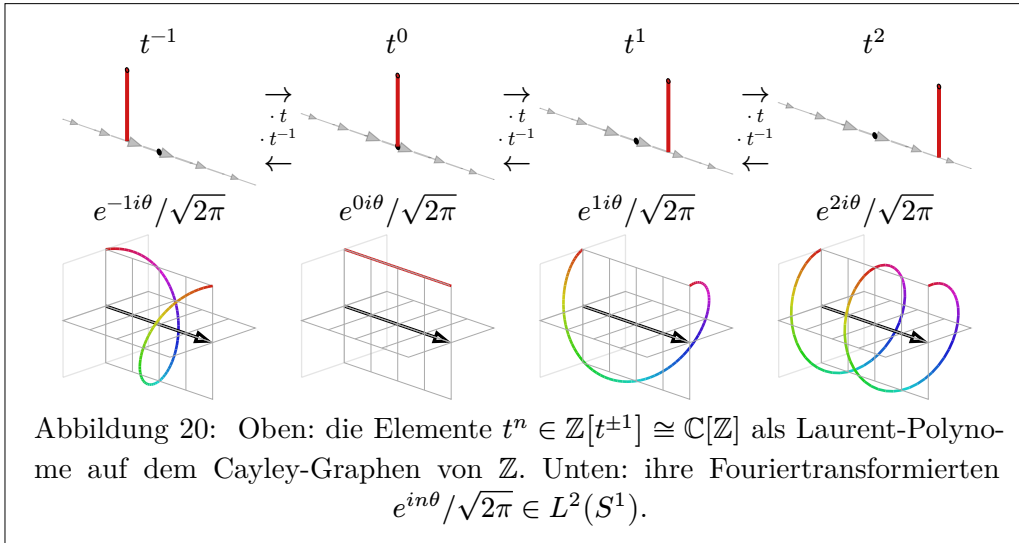
korrespondiert die linke Wirkung des Erzeugers $1 \in \mathbb{Z}$ gegeben durch den Indexshift auf den Basiselementen

$$1 \lll \cdot = 1 + \cdot \tag{77}$$

zu einem Shift

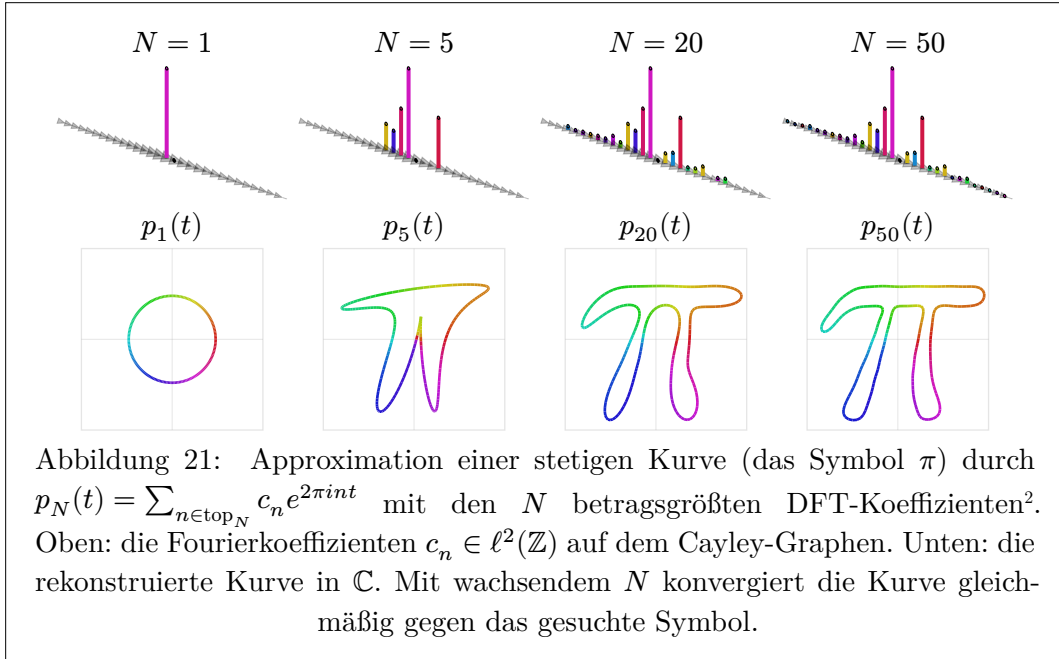
$$\mathcal{F}(1 \lll \cdot) = \left(\frac{e^{ix\pi}}{\sqrt{2\pi}} \mapsto \frac{e^{i(x+1)\pi}}{\sqrt{2\pi}} = e^{ix} \frac{e^{ix\pi}}{\sqrt{2\pi}} \right) \tag{78}$$

der Basisvektoren von $L^2[-\pi, \pi]$. Dies können wir einfach für Laurent Polynome in Abbildung 20 sehen.



Es entspricht die linksreguläre Darstellung von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ der Multiplikation durch *Laurent-Polynome* auf $L^2[-\pi, \pi]$ (siehe Abbildung 12). Also ist $\mathcal{B}(L^2[-\pi, \pi])^{\lll}$ die Algebra der bezüglich Laurent-Polynomen äquivarianten Operatoren.

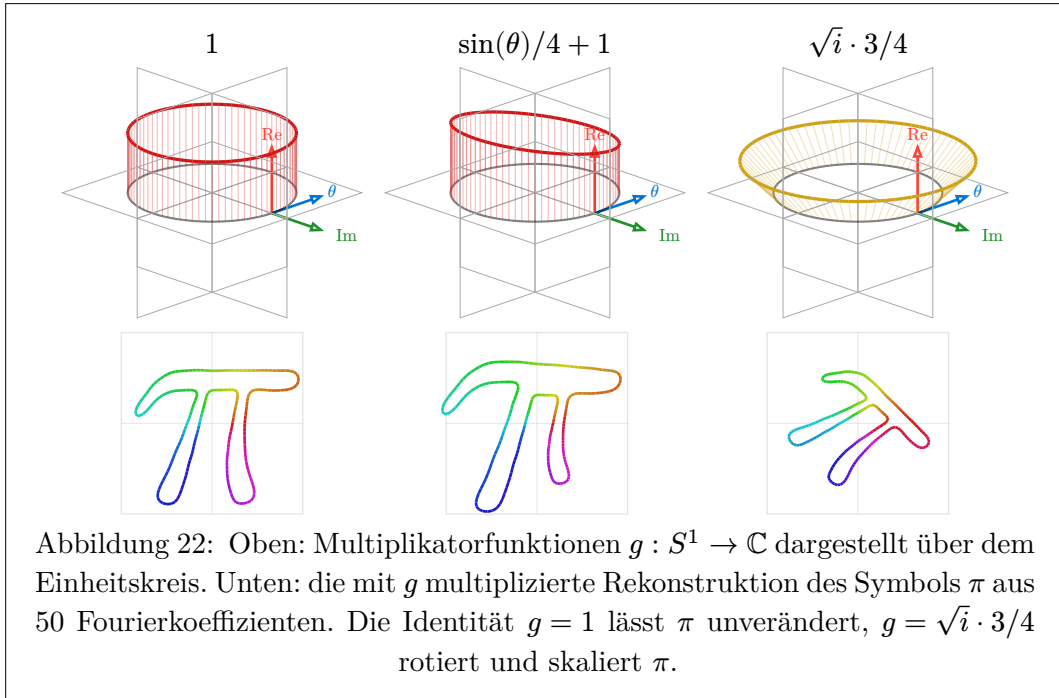
Nach dem *Satz von Stone-Weierstraß* ist jedes $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ein L^2 -Limes von Laurent-Polynomen $f = \lim_k p_k$ (siehe Abbildung 21).



Für $T \in \mathcal{B}(L^2[-\pi, \pi])^{\llcorner}$ folgt aus Stetigkeit und $\cdot \llcorner$ -Äquivarianz

$$Tf = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} Tp_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\right)T(\mathcal{F}(\text{id})) = T(\mathcal{F}(\text{id})) \cdot f \quad 79$$

das heißt T ist bereits eindeutig durch $T(\mathcal{F}(\text{id}))$ bestimmt. Dabei ist $T(\mathcal{F}(\text{id})) \in L^\infty[-\pi, \pi]$ wesentlich beschränkt durch $\|T\|$. Analog liefert jedes $g \in L^\infty[-\pi, \pi]$ einen Operator in $\mathcal{B}(L^2[-\pi, \pi])^{\llcorner}$. Es folgt $\mathcal{B}(L^2[-\pi, \pi])^{\llcorner} \cong L^\infty[-\pi, \pi] \cong L^\infty(S^1)$.



²Diskrete Fouriertransformation

Definition 2.26. Sei H ein Hilbertraum. Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ ist der *Kommutante*

$$M' := \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \quad \forall S \in M\} \quad 80$$

und der *Bikommutant* $M'' := (M')'$.

Eine $*$ -Unteralgebra $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ mit Eins heißt *von-Neumann-Algebra*, wenn eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. M ist schwach abgeschlossen (das heißt abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie).
2. M ist stark abgeschlossen (das heißt abgeschlossen in der starken Operatortopologie).
3. $M = M''$ (von-Neumann-Bikommutantensatz).

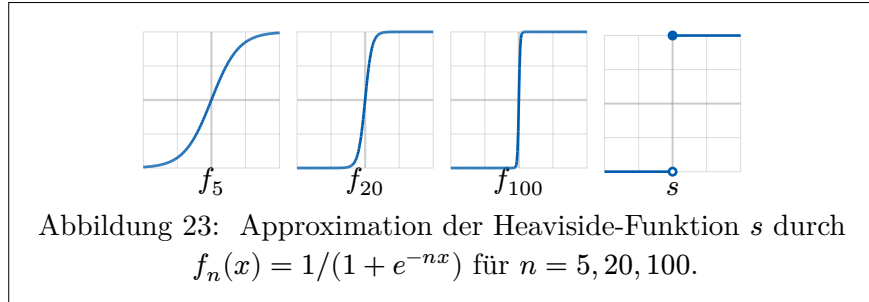
Die Äquivalenz dieser drei Bedingungen ist der Inhalt des *von-Neumann-Bikommutantensatzes* (Theorem 2.19 in [13]).

Als kurzer Einschub ist hier eine $*$ -Algebra eine Algebra über \mathbb{C} zusammen mit einer *Involution* (einer konjugiert-linearen Abbildung $T \mapsto T^*$). Eine C^* -Algebra ist zusätzlich eine Banachalgebra, deren Norm die C^* -Identität $\|T^*T\| = \|T\|^2$ erfüllt.

Beispiel. Sei $H = L^2([-1, 1])$ und

$$M := \{f \cdot (\cdot) : f \in C([-1, 1])\} \subseteq \mathcal{B}(H), \quad 81$$

die Algebra der Multiplikationsoperatoren $\xi \mapsto f\xi$ für stetige Funktionen f . Dann ist M eine unitäre $*$ -Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$, aber *keine* von-Neumann-Algebra, denn die Heaviside-Funktion $s \in L^\infty([-1, 1]) \setminus C([-1, 1])$ wird von stetigen Funktionen $f_n \in C([-1, 1])$ punktweise approximiert (siehe Abbildung 23), liegt aber nicht in M .



Wir definieren nun die für uns zentrale Gruppen-von-Neumann-Algebra. Dabei bezeichnen die Bilder

$$\mathbb{C}[G] \ggg \cdot = \{a \ggg \cdot \mid a \in \mathbb{C}[G]\} \subset \mathcal{B}(\ell^2(G)) \quad 82$$

und

$$\mathbb{C}[G] \lll \cdot = \{a \lll \cdot \mid a \in \mathbb{C}[G]\} \subset \mathcal{B}(\ell^2(G)) \quad 83$$

unitäre $*$ -Unteralgebren von $\mathcal{B}(\ell^2(G))$.

Definition 2.27 (H. Kammeyer [13]). Die *rechte Gruppen-von-Neumann-Algebra* $\mathcal{R}(G)$ ist der schwache Abschluss der unitären $*$ -Unteralgebra $\mathbb{C}[G] \ggg \cdot \subset \mathcal{B}(\ell^2(G))$:

$$\mathcal{R}(G) := \overline{\mathbb{C}[G] \ggg \cdot}^w = (\mathbb{C}[G] \ggg \cdot)'' \quad 84$$

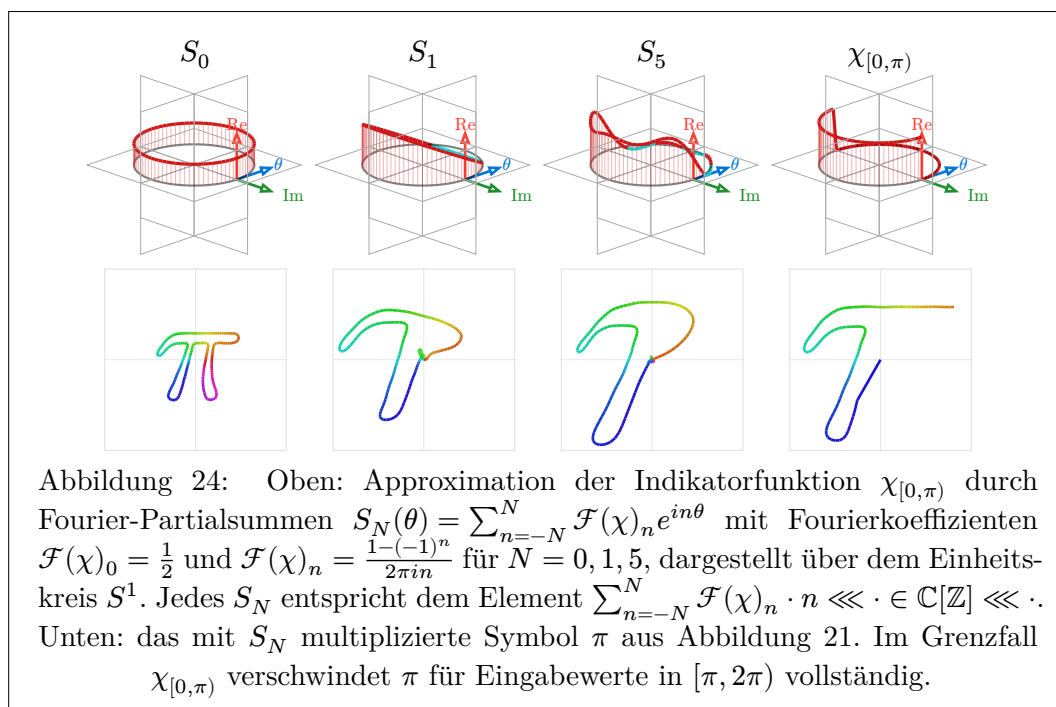
Analog ist die *linke Gruppen-von-Neumann-Algebra* $\mathcal{L}(G)$ der schwache Abschluss von $\mathbb{C}[G] \lll \cdot$:

$$\mathcal{L}(G) := \overline{\mathbb{C}[G] \lll \cdot}^w = (\mathbb{C}[G] \lll \cdot)'' . \quad 85$$

Es stellt sich die Frage, welche Elemente in $\overline{\mathbb{C}[G] \lll \cdot}^w$ sind, jedoch nicht in $\mathbb{C}[G] \lll \cdot$, also dessen, warum wir den schwachen Abschluss bilden. Eine Antwort darauf können wir in Beispiel 2.25 bereits sehen: Dort entspricht $\mathbb{C}[\mathbb{Z}] \lll \cdot$ unter der Fouriertransformation den Multiplikationsoperatoren mit trigonometrischen Polynomen (also endlichen Laurentpolynomen unter Fourier-Transformation), während der schwache Abschluss $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) \cong L^\infty(S^1)$ die Multiplikationsoperatoren mit beliebigen wesentlich beschränkten messbaren Funktionen umfasst. Beispielsweise liegt der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} M_{\chi_{[0,\pi)}} : L^2(S^1) &\rightarrow L^2(S^1) \\ M_{\chi_{[0,\pi)}}(f)(e^{i\theta}) &= \chi_{[0,\pi)}(\theta) f(e^{i\theta}) \end{aligned} \quad 86$$

mit der Indikatorfunktion auf dem Halbkreis in $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, aber nicht in $\mathbb{C}[\mathbb{Z}] \lll \cdot$.



Analog können wir

$$\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}^n))^{\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \lll \cdot} \cong L^\infty(T^n) \quad 87$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen[22, Bsp. 1.4].

Bemerkung. Es gilt $\mathbb{C}[G] \ggg \cdot \subset \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\mathbb{C}[G] \lll \cdot}$ und $\mathbb{C}[G] \lll \cdot \subset \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\mathbb{C}[G] \ggg \cdot}$.

Der folgende Satz zeigt, dass diese Inklusionen sogar die kompletten Algebren beschreiben:

Theorem 2.28 (*H. Kammeyer [13]*). *Es gilt $\mathcal{R}(G) = \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\mathbb{C}[G] \lll \cdot}$ und $\mathcal{L}(G) = \mathcal{B}(\ell^2(G))^{\mathbb{C}[G] \ggg \cdot}$. Insbesondere ist $\mathcal{R}(G) = \mathcal{L}(G)'$ der Kommutant von $\mathcal{L}(G)$.*

Somit ist $\mathcal{R}(G)$ genau die Algebra der beschränkten *links- G -äquivarianten* Operatoren auf $\ell^2(G)$

Beispiel (*H. Kammeyer [13]*). Ist G eine *endliche* Gruppe, so ist $\ell^2(G) = \mathbb{C}[G]$ endlich-dimensional und jede Unteralgebra automatisch abgeschlossen. Damit gilt

$$\mathcal{R}(G) = \mathbb{C}[G] \ggg \cdot \cong \mathbb{C}[G]. \quad 88$$

2.2.3 Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln und Von-Neumann-Spur

Wir können analog zu Definition 2.18> die ℓ^2 -Vervollständigung des zellulären $\mathbb{Z}[G]$ -Kettenkomplex $C_*(\tilde{X})$ zu

$$\begin{aligned} C(X; \cdot \lll \cdot) &\in \mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{Mod}) \\ C(X; \cdot \lll \cdot) &= \ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(\tilde{X}) \end{aligned} \quad 89$$

betrachten, wobei in Definition 2.18> verlangt wurde, dass die Darstellung in einen endlich-dimensionalen Vektorraum gehen würde. Wir haben aber für eine unendliche Gruppe G , dass $\ell^2(G)$ ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum ist. Dementsprechend verwenden wir auch $C(X; \cdot \lll \cdot) \in \mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{Mod})$ statt $C(X; \cdot \lll \cdot) \in \mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{Mod}^{\text{fg}})$.

Um die Reidemeister-Torsion dieses Kettenkomplexes zu berechnen, müssen wir jedoch Determinanten (dementsprechend Spuren) der Randabbildungen berechnen können. Es ist klar, dass $\mathcal{L}(G)\mathbf{Mod}$ keine geeignete Spur hat, wie wir bereits für $\text{id}_{\ell^2(G)}$ sehen können, wenn G unendlich ist. Der Trick ist nun, die Äquivarianz auszunutzen, denn es verlaufen die Randabbildungen zwischen verschiedenen Potenzen $(\ell^2(G))^{k_n}$, wobei k_n die Anzahl der n -Zellen von X bezeichnet [22, Def. 1.29]. Gehen wir daher über in die Kategorie der Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln, so trägt diese durch die G -äquivariante Struktur eine kanonische endliche Spur (die Von-Neumann-Spur) und erlaubt es uns im Folgenden eine Determinante zu definieren (vgl. Proposition 2.14).

Definition 2.29 (*W. Lück [22, S. 16], H. Kammeyer [13, S. 25]*). Ein *Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Modul* ist ein Hilbertraum V mit isometrischer G -Linkswirkung, der G -äquivariant isometrisch in $H \otimes \ell^2(G)$ für einen Hilbertraum H einbettet werden kann. Er heißt *endlich erzeugt*, falls $V \hookrightarrow (\ell^2(G))^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und *frei*, falls $V \cong (\ell^2(G))^n$. Ein *Morphismus* ist ein beschränkter G -äquivarianter Operator, und die daraus resultierende Kategorie bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(G)\mathbf{HilbMod}$ [13, S. 53].

Das zentrale Beispiel ist: haben wir einen eigentlichen G -CW-Komplex endlichen Typs X , so sind die zellulären Kettenmoduln $C(X; \cdot \lll \cdot)$ freie und dementsprechend projektive, endlich erzeugte Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln[13, Thm. 3.11].

Durch $V \hookrightarrow (\ell^2(G))^n$ gilt für die Endomorphismenalgebra $\mathcal{B}(V)^{\mathbb{C}[G]^n \ggg \cdot}$ nach Theorem 2.28, dass diese durch $(\mathcal{R}(G))^{n \times n}$ gegeben ist, also die $n \times n$ -Matrizen A über $\mathcal{R}(G)$, deren Einträge Elemente von $\mathcal{R}(G)$ sind[13, Bsp. 2.28]:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in (\mathcal{R}(G))^{n \times n}$$

wobei

$$a_{j,k} \in \mathcal{R}(G)$$

$$a_{j,k} := \lim_{i \rightarrow \infty} a_{j,k}^{(i)}$$

$$a_{j,k}^{(i)} \in \mathbb{C}[G] \ggg \cdot$$

$$a_{j,k}^{(i)} := \left(\sum_{g \in G} c_{j,k,g}^{(i)} g \right) \ggg \cdot$$

90

Um darauf einen Determinantenbegriff aufzubauen, definieren wir zunächst eine Spur auf $\mathcal{R}(G)$, die die G -äquivalente Struktur der Operatoren berücksichtigt.

Definition 2.30 (*H. Kammeyer [13, S. 33]*). Die *Von-Neumann-Spur* ist

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} : \mathcal{R}(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(T) \mapsto \langle e, Te \rangle,$$

91

wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Sie erweitert sich für alle $n \in \mathbb{N}$ zu

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)} : \mathcal{B}(\ell^2(G)^n) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(A) := \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(A_{ii})$$

92

und für einen endlich erzeugten Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Modul H mit G -äquivanter isometrischer Einbettung $\iota : H \hookrightarrow (\ell^2(G))^n$ auf $\mathcal{B}(H)^G$ durch

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(T) := \mathrm{End}_{\mathcal{L}(G)\mathrm{HilbMod}^{\mathrm{fg}}} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(T) := \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(\iota \circ T \circ \mathrm{pr}_{\iota(H)}),$$

93

unabhängig von der Wahl von ι [13, Prop. 2.33].

Natürlich erwarten wir von einer *Spur*, dass diese auch die *Spureigenschaft* $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(ST) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}(TS)$ erfüllt, und dies ist auch der Fall [13, Prop. 2.32]. Für endliche G ist $\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(G)}\left(\sum_g c_g g\right) = c_e$ [13, Bsp. 2.25, Def. 2.31] und für die Fouriertransformation aus Beispiel 2.25 gilt:

Beispiel (*W. Lück [22, Bsp. 1.4]*). Unter dem Isomorphismus $\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n) \cong L^\infty(T^n)$ aus Beispiel 2.25, der $f \in L^\infty(T^n)$ auf den \mathbb{Z}^n -äquivalenten Multiplikationsoperator M_f abbildet, wird die Von-Neumann-Spur zum Integral bezüglich des normalisierten Haar-Maßes μ auf T^n (das heißt $d\mu = d\theta/(2\pi)$ auf $T^1 = S^1$, beziehungsweise das n -fache Produktmaß auf T^n):

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n)} : L^\infty(T^n) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_{T^n} f \, d\mu. \quad 94$$

Betrachten wir $f(e^i\theta) = \frac{1}{2} + \cos(\theta) \in L^\infty(S^1)$, so korrespondiert dies unter der Fouriertransformation zu $M_f := \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \ggg \cdot \in \mathcal{R}(\mathbb{Z})$ und wir können die von-Neumann Spur berechnen als $\int f \, d\mu = 1/2$ oder aber als $\langle 0, M_f e \rangle = 1/2$.

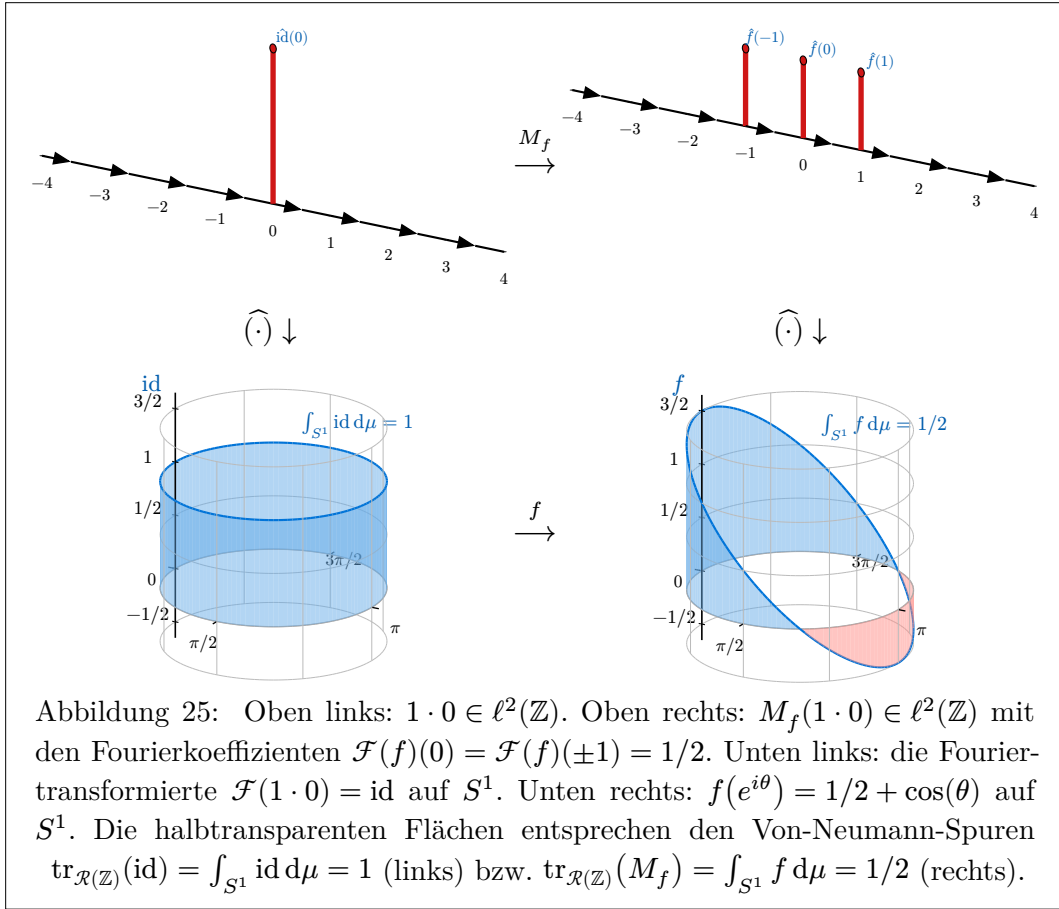


Abbildung 25: Oben links: $1 \cdot 0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Oben rechts: $M_f(1 \cdot 0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ mit den Fourierkoeffizienten $\mathcal{F}(f)(0) = \mathcal{F}(f)(\pm 1) = 1/2$. Unten links: die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(1 \cdot 0) = \text{id}$ auf S^1 . Unten rechts: $f(e^{i\theta}) = 1/2 + \cos(\theta)$ auf S^1 . Die halbtransparenten Flächen entsprechen den Von-Neumann-Spuren $\text{tr}_{\mathcal{R}(\mathbb{Z})}(\text{id}) = \int_{S^1} \text{id} \, d\mu = 1$ (links) bzw. $\text{tr}_{\mathcal{R}(\mathbb{Z})}(M_f) = \int_{S^1} f \, d\mu = 1/2$ (rechts).

Mit Rückblick auf Beispiel 2.28 ist folgende Definition klar:

Definition 2.31 (H. Kammeyer [13, Def. 2.37]). Die von-Neumann-Dimension eines endlich erzeugten Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduls H ist

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{R}(G)} : \mathcal{L}(G)\text{-HilbMod} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \dim_{\mathcal{R}(G)}(H) &:= \text{tr}_{\mathcal{R}(G)}(\text{id}_H), \end{aligned} \tag{95}$$

Hieraus folgt direkt für eine G -äquivalente beschränkte Abbildung $f : U \rightarrow V$ endlich erzeugter Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Moduln, dass $\dim_{\mathcal{R}(G)} \ker(f) = \text{tr}_{\mathcal{R}(G)}(\text{proj}_{\ker f})$, wobei $\text{proj}_{\ker f} : U \rightarrow U$ die orthogonale Projektion auf $\ker f$ bezeichnet [13, Def. 2.37, Prop. 2.33].

2.3 Fuglede-Kadison-Determinante

Für komplexe Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt die klassische Formel

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)). \tag{96}$$

Ist A zudem invertierbar, so gilt $\det(A) = \exp(\text{tr}(\log(A)))$ äquivalentermaßen [28, Gl. (3) und (4)]. Da die Von-Neumann-Spur $\text{tr}_{\mathcal{R}(G)}$ aus Definition 2.30 eine geeignete Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spur auf die Gruppen-von-Neumann-Algebra $\mathcal{R}(G)$ ist, liegt es nahe, $\exp(\text{tr}_{\mathcal{R}(G)}(\log(|f|)))$ als Ersatz für die Determinante zu verwenden. Diese Idee führt zu der *Fuglede-Kadison-Determinante*, welche ursprünglich 1952 von dem dänischen Mathematiker Bent Fuglede und dem ame-

rikanischen Mathematiker Richard Kadison für endliche Von-Neumann-Algebren eingeführt wurde [28, Abschnitt 3], [29, S. 522].

Sei G eine abzählbare diskrete Gruppe und $f : U \rightarrow V$ ein Morphismus endlich erzeugter Hilbert- $\mathcal{R}(G)$ -Moduln. Den *Betrag* von f bezeichnen wir mit $|f| := \sqrt{f^* f} : U \rightarrow U$ und er ist ein positiver selbstadjungierter Operator auf U . Nach dem Spektralsatz und dem Borelschen Funktionalkalkül ist für jede beschränkte borelmeßbare Funktion $h : \sigma(|f|) \rightarrow \mathbb{C}$, wobei

$$\sigma(|f|) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |f| - \lambda \cdot \text{id}_U \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{B}(U)\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \quad 97$$

das Spektrum von $|f|$ bezeichnet, ein eindeutiger Operator $h(|f|) \in \mathcal{B}(U)$ definiert [13, Kapitel 5.2, Theorem 5.10]. Für eine Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ sei $\chi_B : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ die Indikatorfunktion. Dann definieren wir die Spektralprojektion zu B durch

$$P^{|f|}(B) := \chi_B(|f|) \in \mathcal{B}(U)_p \quad 98$$

via [13, Kapitel 5.2, Borel Functional Calculus und Spektralsatz]. Hierbei besteht $\mathcal{B}(U)_p$ aus allen Projektionen in $\mathcal{B}(U)$, wie in [30, S. 165] beschrieben. Für $\lambda \geq 0$ setzen wir

$$\begin{aligned} E_\lambda^{|f|} &:= P^{|f|}([0, \lambda]) \\ &= \chi_{[0, \lambda]}(|f|) \\ &= \left(u \mapsto \chi_{[0, \lambda]}(|f(u)|) \right) \in \mathcal{B}(U)_p. \end{aligned} \quad 99$$

Dies ist die *Spektralschar* von $|f|$ und der zugehörige *Spektralunterraum* ist $U_{[0, \lambda]}^{|f|} := \text{im } E_\lambda^{|f|}$. [13, Definition 3.7].

Beispiel (P. De La Harpe [28, Bsp. 5]). Sei $G = \mathbb{Z}$. Unter dem Isomorphismus $\mathcal{R}(\mathbb{Z}) \cong L^\infty(S^1)$ aus Beispiel 2.25 entspricht ein $f \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))^\lambda$ einem Multiplikationsoperator M_φ mit $\varphi \in L^\infty(S^1)$. Unter dieser Identifikation korrespondiert $|f|$ zu $M_{|\varphi|}$ und die Spektralprojektion wird zu

$$E_\lambda^{|f|} = M_{\chi_{\{|\varphi| \leq \lambda\}}}, \quad 100$$

also zur Multiplikation mit der Indikatorfunktion der Niveaumenge

$$\{e^{i\theta} \in S^1 : |\varphi(e^{i\theta})| \leq \lambda\}.$$

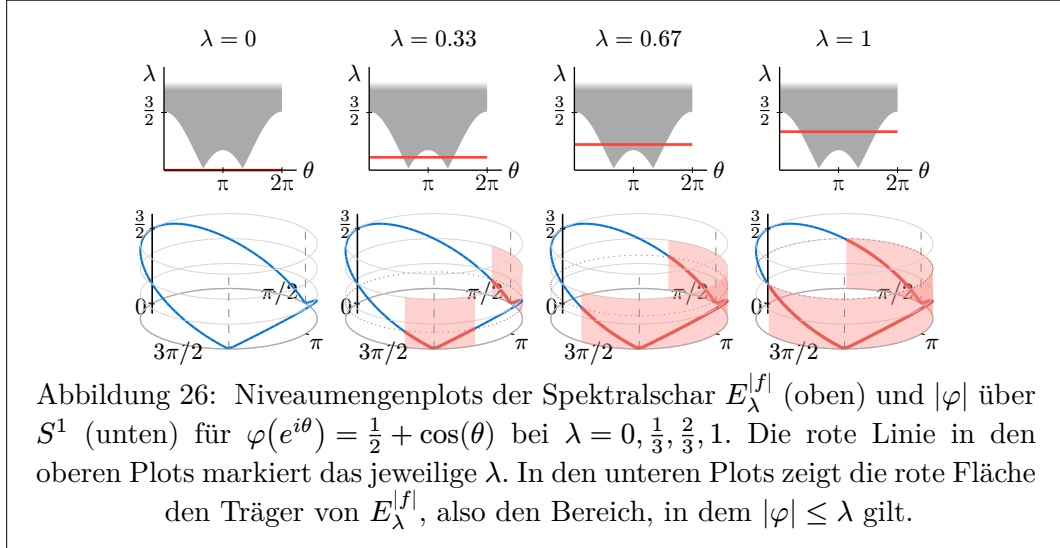
Betrachten wir konkret $\varphi(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} + \cos(\theta)$. Da φ reellwertig ist, gilt $f^* = f$ und somit $|f| = M_{|\varphi|}$ mit

$$|\varphi(e^{i\theta})| = \left| \frac{1}{2} + \cos \theta \right|. \quad 101$$

Die Werte von φ liegen in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, also ist $\text{spec}(|f|) = [0, \frac{3}{2}]$, und die Nullstellen von φ sind $\theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$ (dort gilt $\cos \theta = -\frac{1}{2}$). Die Spektralschar ist $E_\lambda^{|f|} = M_{\chi_{\{\frac{1}{2} + \cos \theta \leq \lambda\}}}$, wobei die Bedingung $|\frac{1}{2} + \cos \theta| \leq \lambda$ äquivalent zu $-\frac{1}{2} - \lambda \leq \cos \theta \leq -\frac{1}{2} + \lambda$ ist. Somit:

$$E_\lambda^{|f|} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < 0 \\ M_{\chi_{\{\cos \theta \in [-\frac{1}{2}-\lambda, -\frac{1}{2}+\lambda]\}}} & \text{für } 0 \leq \lambda < \frac{1}{2} \\ M_{\chi_{\{\cos \theta \leq \lambda - \frac{1}{2}\}}} & \text{für } \frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{3}{2} \\ \text{id} & \text{für } \lambda \geq \frac{3}{2}. \end{cases} \quad 102$$

Wir können dies folgendermaßen plotten:



Insbesondere ist $E_0^{|f|}$ die Projektion auf $\{\cos \theta = -\frac{1}{2}\}$, eine Menge vom Lebesgue-Maß Null, sodass $\dim_{\mathcal{X}(\mathbb{Z})}(\ker f) = 0$.

Definition 2.32 (H. Kammeyer [13]). Die Spektraldichtefunktion von f ist

$$F_f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad 103$$

$$F_f(\lambda) := \dim_{\mathcal{X}(G)}(\text{im } E_\lambda^{|f|})$$

Sie ist monoton wachsend und rechtsseitig stetig.

Der Zusammenhang zu der geometrischen Multiplizität aus der linearen Algebra ist hier gut zu erkennen und gibt Aufschluss darauf, warum F_f rechts-, aber nicht unbedingt linksstetig ist: Für λ ein Eigenwert einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums, ist $\mu_{\text{geo}}(\lambda) = \dim \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{id})$. Außerdem haben wir für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_f(a) - F_f(a - \varepsilon)$, dass dies 0 ist, wenn F_f in a linksstetig ist, also a im Spektrum von f liegt[22, S. 127]. Der Sprung den F_f bei der Unstetigkeitsstelle a macht, ist genau die geometrische Multiplizität von a als Eigenwert von $|f|$, wenn f ein Operator auf einem endlichdimensionalen Vektorraum wäre[31, S. 44].

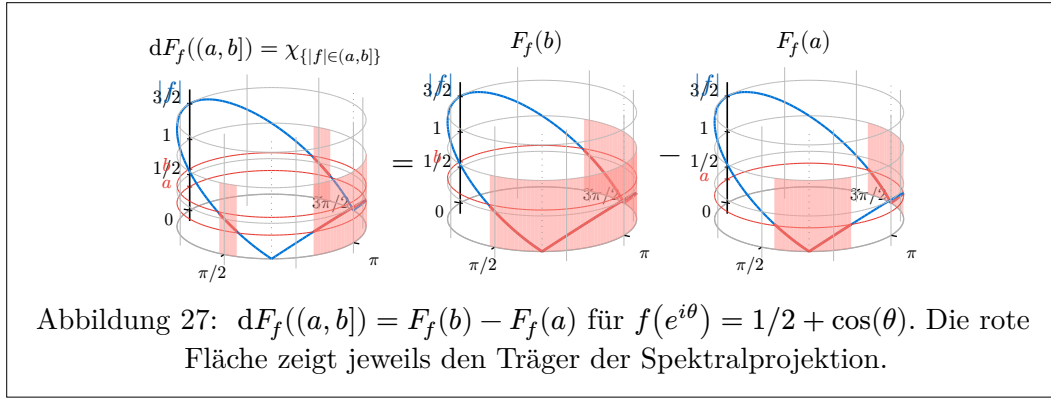
Wir bezeichnen mit dF_f das von F_f induzierte Maß auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, also

$$dF_f((a, b]) = F_f(b) - F_f(a) \quad 104$$

für $0 \leq a < b$. Wir erkennen auch direkt, dass

$$F_f(0) = \dim_{\mathcal{X}(G)}(\ker f), \quad 105$$

da $E_0^{|f|} = \text{proj}_{\ker |f|} = \text{proj}_{\ker f}$ gilt.



Definition 2.33 (H. Kammeyer [13], W. Lück [22, S. 127]). Die Fuglede-Kadison-Determinante von f ist

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f := \overline{\exp} I_f,$$

wobei

$$I_f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$I_f := \left(\int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_f(\lambda) \right)$$

106

$$\overline{\exp} : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$\overline{\exp} := t \mapsto \begin{cases} \exp(t) & \text{für } t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } t = -\infty \end{cases}$$

$$V, W \in {}_{\mathcal{R}(G)}\text{HilbMod}^{\text{fg}}$$

wobei das Integral ein Lebesgue-Stieltjes-Integral bezüglich des von F_f induzierten Maßes auf $[0, \infty)$ ist. Man nennt f von Determinantenklasse, wenn $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f > 0$.

Bemerkung. Da $\ln(\lambda) \rightarrow -\infty$ für $\lambda \rightarrow 0^+$, kann $I_f = -\infty$ wenn, nämlich genau dann, wenn das Spektrum von $|f|$ nahe 0 zu stark konzentriert ist. Die Bedingung „von Determinantenklasse“ schließt diesen Fall aus und garantiert $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f \in (0, \infty)$.

Es gilt $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(0) = 1$, weil $\sigma(0) = \{0\}$, somit $F_0 = 0$, somit $I_0 = 0$ und somit $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(0) = \exp(0) = 1$ ist.

Proposition 2.34 (H. Kammeyer [13, S. 127]). Ist G endlich, so gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f = \sqrt[|G|]{\prod_{\lambda \in \sigma(f^* f)^+} \lambda^{\mu(\lambda)}}$$

wobei

$$\sigma(f^* f)^+ := \{\lambda \in \sigma(f^* f) \mid \lambda > 0\}$$

107

$$\mu : \sigma(f^* f)^+ \rightarrow \mathbb{N},$$

$$\mu(\lambda) := \dim \ker(f^* f - \lambda \cdot \text{id})$$

und die Fuglede-Kadison-Determinante von f ist die $|G|$ -te Wurzel des Produkts der Singulärwerte von f .

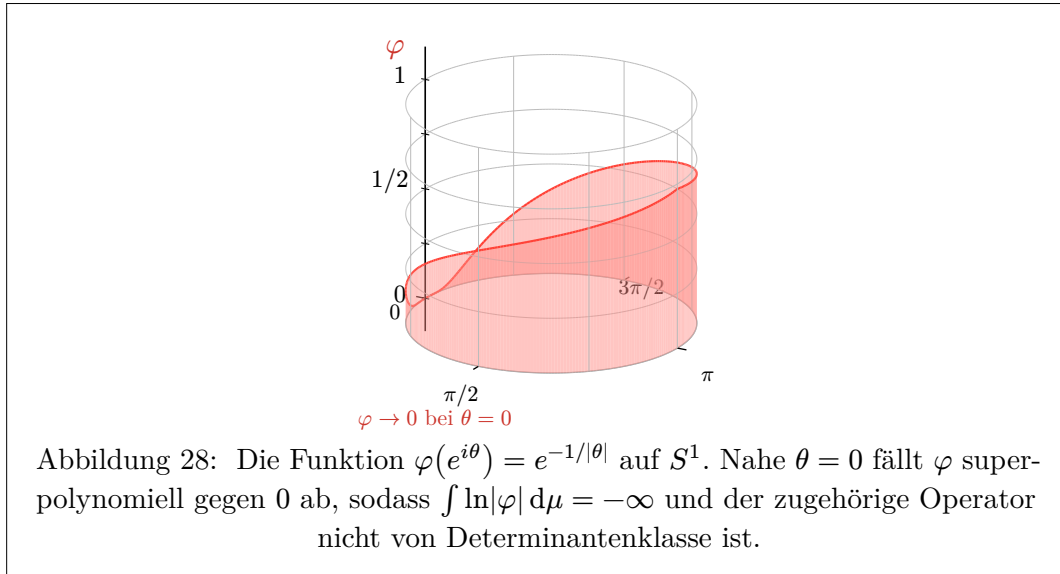
Beweis: Siehe [13, S. 127]. □

Ein Beispiel für eine Abbildung, welche nicht von Determinantenklasse ist, wird im folgenden Beispiel gegeben.

Beispiel. Sei $G = \mathbb{Z}$ und $f = M_\varphi$ mit $\varphi(e^{i\theta}) := e^{-1/|\theta|}$ für $\theta \in (-\pi, \pi]$ unter dem Isomorphismus aus Beispiel 2.25. Dann ist $\sigma(|f|) = [0, e^{-1/\pi}]$ und wie in Beispiel 2.31 folgt mit Beispiel 2.30

$$\int_{(0,\infty)} \ln(\lambda) dF_f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|\varphi(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|\theta|} d\theta = -\infty, \quad 108$$

da $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\theta} d\theta = \infty$. Somit ist $\det_{\mathcal{R}(\mathbb{Z})}^{\text{FK}} f = \exp(-\infty) = 0$ und f ist *nicht* von Determinantenklasse, da φ nahe $\theta = 0$ superpolynomiell gegen 0 fällt und $\ln|\varphi|$ daher nicht integrierbar ist.



Proposition 2.35 (W. Lück [22, Lem. 3.15]). Seien $f, g \in \text{Hom}(\mathcal{R}(G)\text{HilbMod}^{\text{fg}})$ dann gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(g \oplus f) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} g \cdot \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f \quad 109$$

Beweis: Wir haben für die Spektraldichtefunktion von $g \oplus f$:

$$\begin{aligned} F_{g \oplus f}(\lambda) &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_\lambda^{|g \oplus f|} \right) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_\lambda^{|g|} \oplus \text{im } E_\lambda^{|f|} \right) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_\lambda^{|g|} \right) + \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_\lambda^{|f|} \right) \\ &= F_g(\lambda) + F_f(\lambda) \end{aligned} \quad 110$$

und damit gilt für die Fuglede-Kadison-Determinante:

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(g \oplus f) &= \overline{\exp} I_{g \oplus f} \\
&= \overline{\exp} \int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_{g \oplus f}(\lambda) \\
&= \overline{\exp} \int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) d(F_g + F_f)(\lambda) \\
&= \overline{\exp} \left(\int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_g(\lambda) + \int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_f(\lambda) \right) \\
&= \overline{\exp} I_g \cdot \overline{\exp} I_f \\
&= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} g \cdot \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f
\end{aligned} \tag{111}$$

□

Proposition 2.36 (W. Lück [22, Thm. 3.14]).

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(g \circ f) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} g \cdot \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} f \tag{112}$$

Beweis: Der Beweis befindet sich in [22, Thm. 3.14]. □

Möchten wir für G -CW Komplexe nach der ℓ^2 -Vervollständigung nun die Torsion als alternierendes Produkt der Fuglede-Kadison-Determinanten der Differentiale definieren, so müssen wir sicherstellen, dass diese von Determinantenklasse sind. In unserem Fall hilft uns hierbei folgende Proposition, welche zeigt, dass eine große Klasse von Operatoren von Determinantenklasse ist:

Proposition 2.37 (S. Friedl und W. Lück [7, Prop. 1.1]). Sei G eine residuell endliche Gruppe und

$$A : \mathbb{Z}[G]^m \rightarrow \mathbb{Z}[G]^n \tag{113}$$

eine Matrix über dem Gruppenring. Dann ist der durch Rechtsmultiplikation mit A definierte Morphismus

$$\ell^2(G) \otimes A : \ell^2(G)^m \rightarrow \ell^2(G)^n \tag{114}$$

von Determinantenklasse.

Hierbei nutzen wir *residuell endliche Gruppen*:

Definition 2.38 (H. Kammeyer [13, Def. 5.1, S. 87]). Eine Gruppe G heißt *residuell endlich*, wenn eine absteigende Folge

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \dots \tag{115}$$

von Normalteilern $G_i \triangleleft G$ von endlichem Index mit $\bigcap_{i \geq 0} G_i = \{1\}$ (*Residualkette*) existiert.

Die prototypischen Beispiele von nicht residuell endlichen Gruppen sind:

- Die Baumslag-Solitar-Gruppen

$$\text{BS}(m, n) = \langle a, b \mid ba^m b^{-1} = a^n \rangle, \quad |m| \neq |n| \tag{116}$$

- Unendliche einfache Gruppen wie $\text{Alt}(\mathbb{N})$
 - Divisible Gruppen wie $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ oder die Prüfer-Gruppe $\mathbb{Z}[p^\infty] = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$
- Jedoch sind viele Gruppen denen man begegnet residuell endlich, wie zum Beispiel [13, S. 88]:

- endliche Gruppen,
- freie Gruppen,
- endlich erzeugte nilpotente Gruppen,
- Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten (Geometrisierung),
- endlich erzeugte lineare Gruppen (Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, K)$ für ein n und einen Körper K beliebiger Charakteristik).

Vermutung 2.39 (*H. Kammeyer [13, Conj. 5.43], W. Lück [22, S. 466]*). Sei G eine beliebige Gruppe und $A \in M(k, l, \mathbb{Z}[G])$ eine Matrix. Dann gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FK}} \left(\ell^2(G)^k \xrightarrow{A} \ell^2(G)^l \right) \geq 1. \quad 117$$

Für residuell endliche Gruppen – und allgemeiner für sofische Gruppen – ist die Determinantenvermutung bewiesen:

Theorem 2.40 (*W. Lück [32, Thm. 3.4], H. Kammeyer [13, Thm. 5.53]*). Sofische Gruppen erfüllen die Determinantenvermutung (Vermutung 2.39). Insbesondere gilt die Determinantenvermutung für alle residuell endlichen Gruppen.

Bemerkung. Die Determinantenvermutung ist entscheidend im Beweis, dass der wachstumsbeschränkte Grad der ℓ^2 -Alexander-Torsion die Thurston-Norm berechnet (Theorem 4.22). Konkret liefert $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FK}}(\ell^2(G) \otimes A) \geq 1$ für Matrizen A über $\mathbb{Z}[G]$ mit G residuell endlich die Positivität $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(1) > 0$ (Lemma 4.18), woraus sich die obere Schranke $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) \leq x_N(\varphi)$ ergibt (Theorem 4.20). Die umgekehrte Ungleichung gilt zunächst für gefaserte Klassen, erstreckt sich durch Stetigkeit auf alle quasi-gefaserter Klassen (Lemma 4.21) und wird schließlich durch Agols virtuellen Faserungssatz (Theorem 3.28) auf alle Klassen verallgemeinert.

2.3.1 Reguläre Fuglede-Kadison-Determinante

Im Folgenden möchten wir uns mit Matrizen $A \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$, ihren durch Rechtsmultiplikation definierten Operatoren $A \gg \cdot : \ell^2(G)^k \rightarrow \ell^2(G)^k$ und deren (leicht angepassten) Fuglede-Kadison-Determinanten genauer beschäftigen.

Definition 2.41 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, Def. 2.3], Y. Liu [8, S. 13]*). Die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante von A ist

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FKr}} : \mathcal{R}(G)^{k \times k} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FKr}} A := \begin{cases} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FK}} A & \text{wenn } \mathrm{rank}_G A = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 118$$

und wir nennen A von regulärer Determinantenklasse, wenn $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\mathrm{FKr}} A > 0$.

Wir nutzen hierbei folgende Definition:

Definition 2.42 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, Def. 2.2]*). Für $A \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$ definieren wir den Rang von A als

$$\mathrm{rank} : \mathcal{R}(G)^{k \times k} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\mathrm{rank}_G(A) := k - \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\ell^2(G)^k / \overline{\mathrm{im}(A \gg \cdot)} \right). \quad 119$$

Nach [3, Lem. 2.3] ist $\text{rank}_G A = k$ genau dann, wenn $A \gg \cdot : \ell^2(G)^k \hookrightarrow \ell^2(G)^k$ injektiv ist.

Auch wenn die Fuglede-Kadison-Determinante und die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante leicht zu verwechseln sind, gibt es signifikante Unterschiede zwischen ihnen. So gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(0) = 1 \neq 0 = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(0). \quad 120$$

Gleichheit herrscht genau in zwei Fällen:

1. A ist injektiv (leicht zu erkennen aus Definition 2.42)
 2. A ist nicht von Determinantenklasse (leicht zu erkennen aus Definition 2.33)
- Insbesondere erlaubt sie uns, leichter mit Grenzwerten zu arbeiten. Betrachten wir dafür die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{R}(G)^{k \times k} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \|A\| &:= \sup_{\|v\|=1} \|A \gg v\|, \end{aligned} \quad 121$$

durch welche wir eine Topologie auf $\mathcal{R}(G)^{k \times k}$ erhalten. Das Problem der Fuglede-Kadison-Determinante und der Nutzen der regulären Fuglede-Kadison-Determinante ist hiermit offensichtlich:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(\varepsilon \cdot \text{id}) &= 0 \neq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \text{id}\right) = 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\varepsilon \cdot \text{id}) &= 0 = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \text{id}\right) = 0 \end{aligned} \quad 122$$

Wir sammeln vorerst einige nützliche Aussagen über die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante:

Proposition 2.43 (*Y. Liu [8, S. 13]*). *Treffen wir die folgenden Annahmen:*

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{R}(G)^{p \times p} \\ (A_n &\in \mathcal{R}(G)^{p \times p})_{n \in \mathbb{N}} \\ A &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \end{aligned} \quad 123$$

so gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_n) \leq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A) \quad 124$$

Bevor wir dies beweisen, beweisen wir einige Hilfslemmata.

Lemma 2.44 (*W. Lück [6, Lem. 4.2]*).
 $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} A = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} A^* = \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A^* A)} = \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A A^*)}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} dF_A((0, \lambda]) &= F_A(\lambda) - F_{A(0)} \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)}\left(\text{im } E_\lambda^{|A|}\right) - \dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker A) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)}\left(\text{im } E_\lambda^{|A^*|}\right) - \dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker A^*) \\ &= F_{A^*}(\lambda) - F_{A^*}(0) \\ &= dF_{A^*}((0, \lambda]) \end{aligned} \quad 125$$

Und Analog haben wir

$$\begin{aligned}
dF_A((0, \lambda]) &= dF_{A^*}((0, \lambda]) \\
&= dF_{\sqrt{A^*A}}((0, \lambda]) \\
&= dF_{A^*A}((0, \lambda^2]) \\
&= dF_{AA^*}((0, \lambda^2])
\end{aligned}
\tag{126}$$

□

Lemma 2.45 (W. Lück [22, Lem. 3.15 (4)]). Für einen positiven Operator $A \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass

$$\forall \varepsilon > \varepsilon_0 : A + \varepsilon \cdot \text{id} \text{ ist invertierbar} \tag{127}$$

gilt. Insbesondere ist dann $A + \varepsilon$ injektiv.

Beweis: Es gilt

$$\sigma(A + \varepsilon \cdot \text{id}) = \sigma(A) + \varepsilon \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} + \varepsilon \tag{128}$$

Wählen wir nun $\varepsilon_0 := \inf \sigma(A)$, so gilt für $\varepsilon > \varepsilon_0$:

$$\sigma(A + \varepsilon \cdot \text{id}) \subseteq \mathbb{R}_{> 0} \tag{129}$$

□

Lemma 2.46. Für positive, injektive Operatoren $A, B \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$ gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + B) \geq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} A \tag{130}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
F_{A+B}(\lambda) &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_{\lambda}^{|A+B|} \right) \\
&= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_{\lambda}^{|A|} \oplus \text{im } E_{\lambda}^{|B|} \right) \\
&\geq \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_{\lambda}^{|A|} \right) \\
&= F_A(\lambda)
\end{aligned}
\tag{131}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + B) &= \overline{\exp} \int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_{A+B}(\lambda) \\
&\geq \overline{\exp} \int_{(0, \infty)} \ln(\lambda) dF_A(\lambda) \\
&= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} A.
\end{aligned}
\tag{132}$$

□

Korollar 2.47. Für einen positiven, (nicht unbedingt injektiven) Operator $A \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$ gilt

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + \varepsilon \cdot \text{id}) \geq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} A \tag{133}$$

Das folgende Lemma lässt sich natürlich auch für die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante anwenden:

Lemma 2.48 (W. Lueck [33, Lemma 6.9], S. Friedl und W. Lück [7, Lemma 3.1, S. 33]). Sei $f \in \mathcal{B}(\ell^2(G)^m, \ell^2(G)^n)^\lambda$ ein beschränkter G -äquivariater Operator.

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(f) \leq \|f\|^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(f)})}. \quad 134$$

Beweis: Ist $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(f) = 0$, so ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Sei also $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(f) > 0$ und F_f die Spektraldichtefunktion von f . Für die Spektraldichtefunktion gilt

$$F_f(\|f\|) - F_f(0) = \dim_{\mathcal{R}(G)}(\ell^2(G)^m) - \dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker f) = \dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(f)}) \quad 135$$

und $F_f(\lambda) = F_f(\|f\|)$ für $\lambda \geq \|f\|$. Mit partieller Integration [22, Lemma 3.15 (1), S. 128] folgt

$$\begin{aligned} \ln(\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(f)) &= \int_{0+}^{\infty} \ln(\lambda) dF_f \\ &= \int_{0+}^{\|f\|} \ln(\lambda) dF_f \\ &= - \int_{0+}^{\|f\|} \frac{F_f(\lambda) - F_f(0)}{\lambda} d\lambda + \ln(\|f\|) \cdot (F_f(\|f\|) - F_f(0)) \quad 136 \\ &\leq (F_f(\|f\|) - F_f(0)) \cdot \ln(\|f\|) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(f)}) \cdot \ln(\|f\|) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(f) \leq \|f\|^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(f)})},$$

wobei die Ungleichung daraus folgt, dass $F_f(\lambda) - F_f(0) \geq 0$ für $\lambda \geq 0$ (da F_f monoton wachsend ist) und somit der Integrand nichtnegativ ist. \square

Lemma 2.49 (W. Lueck [33, Lem. 8.10]). Für einen positiven Operator $A \in \mathcal{R}(G)^{k \times k}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + \varepsilon \cdot \text{id}) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A) \quad 137$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F_{A+\varepsilon \cdot \text{id}_U}(\lambda) &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_\lambda^{|A+\varepsilon \cdot \text{id}_U|} \right) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } P^{|A+\varepsilon \cdot \text{id}_U|}([0, \lambda]) \right) \\ &= \dim_{\mathcal{R}(G)} \left(\text{im } E_{\lambda-\varepsilon}^{|A|} \right) \\ &= F_A(\lambda - \varepsilon). \end{aligned} \quad 138$$

Wir haben nun zwei Fälle:

1. Ist A injektiv, so ist $F_A(0) = 0$ nach Gleichung 105 und wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} \ln(\lambda) dF_{A+\varepsilon \cdot \text{id}_U} &= \int_{((-\varepsilon)^+, \infty)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A \\
&= \int_{((-\varepsilon)^+, 0)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A + \int_{(0,\infty)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A \\
&= \ln(\varepsilon) \cdot F_A(0) + \int_{(0,\infty)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A \\
&= \int_{(0,\infty)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A.
\end{aligned} \tag{139}$$

Für $\varepsilon \in (0, 1]$ und $\lambda > 0$ gilt $\ln(\lambda + \varepsilon) \leq \ln(\lambda + 1)$, wobei $\lambda \mapsto \ln(\lambda + 1)$ bezüglich dF_A integrierbar ist, da F_A auf $[0, \|A\|]$ konzentriert ist und $\ln(\lambda + 1)$ dort beschränkt ist. Andererseits gilt $\ln(\lambda + \varepsilon) \geq \ln(\lambda)$ für $\lambda > 0$, und $\lambda \mapsto \ln(\lambda)$ ist bezüglich dF_A auf $(0, \infty)$ integrierbar, da A injektiv und von Determinantenklasse ist. Somit ist $|\ln(\lambda + \varepsilon)| \leq \max(|\ln(\lambda)|, \ln(\lambda + 1))$ eine integrierbare Majorante, und nach dem Satz der dominierten Konvergenz haben wir

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(0,\infty)} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A &= \int_{(0,\infty)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(\lambda + \varepsilon) dF_A \\
&= \int_{(0,\infty)} \ln(\lambda) dF_A.
\end{aligned} \tag{140}$$

2. Ist A nicht injektiv, so ist $F_A(0) > 0$ und wir haben:

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + \varepsilon \cdot \text{id}) &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}\left((A + \varepsilon \cdot \text{id})|_{(\ker A)^\perp} \oplus (A + \varepsilon \cdot \text{id})|_{\ker A}\right) \\
&\stackrel{h_1}{=} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}\left((A|_{(\ker A)^\perp} + \varepsilon \cdot \text{id}|_{(\ker A)^\perp}) \oplus \varepsilon \cdot \text{id}|_{\ker A}\right) \\
&\leq \left((\|f|_{(\ker A)^\perp}\| + \varepsilon)^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(A|_{(\ker A)^\perp})})} \right) \cdot \varepsilon^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker A)}
\end{aligned} \tag{141}$$

wobei h_1 : Proposition 2.35 ist. Wichtig ist hierbei eigentlich nur der $\varepsilon^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker A)}$ Term, es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left((\|f|_{(\ker A)^\perp}\| + \varepsilon)^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(A|_{(\ker A)^\perp})})} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\|f|_{(\ker A)^\perp}\| + \varepsilon)^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(A|_{(\ker A)^\perp})})} \\
&= \|f|_{(\ker A)^\perp}\|^{\dim_{\mathcal{R}(G)}(\overline{\text{im}(A|_{(\ker A)^\perp})})}
\end{aligned} \tag{142}$$

Da $\dim_{\mathcal{R}(G)}(\ker A) > 0$ ist, aber $\varepsilon \rightarrow 0^+$, folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A + \varepsilon \cdot \text{id}) = 0 = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A). \tag{143}$$

□

Beweis zu Proposition 2.43: Nach Gleichung 122 genügt es den Fall

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_n) > 0 \tag{144}$$

zu betrachten. Wir wählen eine Teilfolge $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_n) > 0. \quad 145$$

Da $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}) > 0$ für hinreichend große k ist, finden wir ein $K \geq 0$, sodass für alle $k \geq K$ gilt, dass $\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(A_{n_k}) > 0$ und A_{n_k} injektiv ist. Wir wissen nach [6, S. 21], dass T^*T ein positiver Operator ist, wenn $T \in \text{Hom}(\mathcal{R}(G)\text{HilbMod}^{\text{fg}})$. Wir haben nach Lemma 2.44

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}) = \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}^* A_{n_k})}, \quad 146$$

wobei $A_{n_k}^* A_{n_k}$ also ein positiver, injektiver Operator ist. Somit gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}^* A_{n_k})} \leq \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}^* A_{n_k} + \varepsilon \cdot \text{id})}, \quad 147$$

wobei die Ungleichung aus Korollar 2.47 folgt. Somit gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_{n_k}^* A_{n_k} + \varepsilon \cdot \text{id})} \\ &= \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A^* A + \varepsilon \cdot \text{id})}, \end{aligned} \quad 148$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Stetigkeit der regulären Fuglede-Kadison-Determinante auf der Untergruppe der invertierbaren Operatoren bezüglich der Normtopologie folgt, da $A_{n_k}^* A_{n_k} + \varepsilon \cdot \text{id}$ für alle $k \geq K$ invertierbar ist, wie Lemma 2.45 zeigt. Zuletzt haben wir

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A^* A + \varepsilon \cdot \text{id})} &= \sqrt{\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A^* A)} \\ &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A), \end{aligned} \quad 149$$

nach Lemma 2.49. Somit gilt die zu zeigende Aussage

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_n) \leq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A). \quad 150$$

□

Als nächstes möchten wir zeigen:

Proposition 2.50 (*Y. Liu [8, Lem. 3.2]*). *Für einen kofinalen Turm von Quotientengruppen $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu G mit $\psi_n : G \rightarrow \Gamma_n$ und ein $A_G \in \mathbb{C}[G]^{k \times k}$ gilt*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}((\psi_n)_* A_G) \leq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_G). \quad 151$$

Wir werden dies beweisen, nachdem wir die verwendeten Begriffe definiert haben.

Definition 2.51 ([34, S. 46]). Ein *kofinaler Turm von Quotientengruppen* von G ist eine absteigende Folge

$$G > \dots > \Gamma_n > \dots > \Gamma_2 > \Gamma_1 \quad 152$$

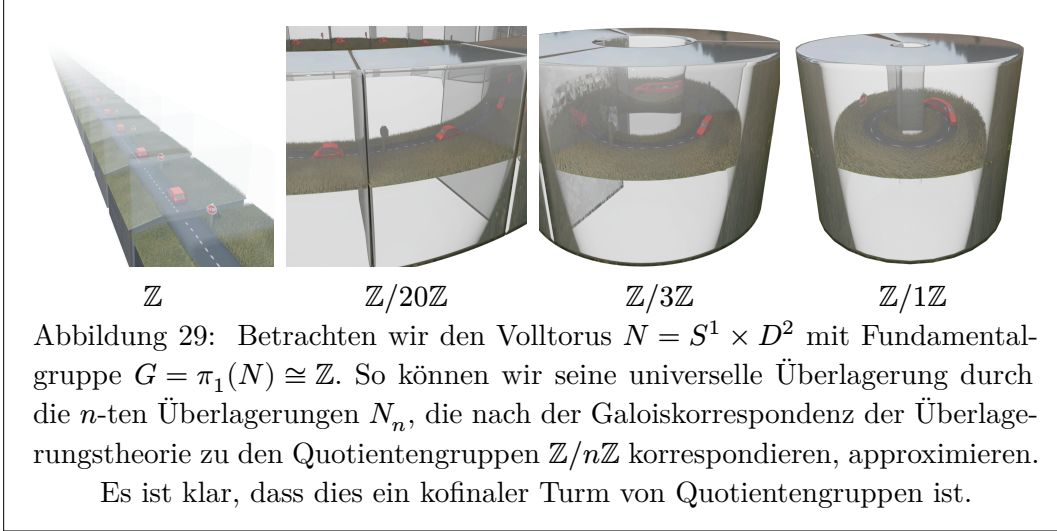
von endlich erzeugten und residuell endlichen Quotientengruppen von G mit den jeweiligen Quotientenhomomorphismen

$$\psi_n : G \rightarrow \Gamma_n, \quad 153$$

sodass gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker \psi_n = \{\text{id}_G\} \quad 154$$

Wir treffen kofinale Türme von Quotientengruppen in der Praxis häufig an, zum Beispiel wenn wir die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit durch ihre endlichen (zusammenhängenden) Überlagerungen approximieren wollen. In diesem Fall ist Γ_n die Fundamentalgruppe der n -ten Überlagerung und ψ_n die Projektion von $G = \pi_1(N)$ auf diese Fundamentalgruppe. Wir erinnern auch daran, dass wir $(\psi_n)_n : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[\Gamma_n]$ auf A_G komponentenweise anwenden.



Nach Definition 2.38 kennen wir bereits einige Gruppen welche *keine* kofinalen Türme von Quotientengruppen besitzen, zum Beispiel $(\mathbb{R}, +)$.

Sei nun ein kofinaler Turm von Quotientengruppen $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zu G mit $\psi_n : G \rightarrow \Gamma_n$ wie in Definition 2.51 gegeben. Sei auch $A_G \in \mathbb{C}[G]^{k \times k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.52 (Y. Liu [8, Lem. 3.2]). *Es gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}} \left((\psi_n)_* (A_G^* A_G + \varepsilon \cdot 1) \right) \\ = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} (A_G^* A_G + \varepsilon \cdot 1). \end{aligned} \quad 155$$

Beweis: Wir schreiben

$$\begin{aligned} B &= A_G^* A_G + \varepsilon \cdot 1 \in \mathbb{C}[G]^{k \times k} \\ B_n &= (\psi_n)_* B \in \mathbb{C}[\Gamma_n]^{k \times k}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad 156$$

für $\varepsilon > 0$. Die selbstadjungierten Operatoren B_n erweitern sich auf $\ell^2(\Gamma_n)^k$ durch $\mathbb{C}[\Gamma_n]^{k \times k} \hookrightarrow \mathcal{R}(\Gamma_n)^{k \times k}$, sind positiv mit

$$\begin{aligned} \sigma(B_n) &\subset [\varepsilon, \|B_n\|] \\ \sigma(B) &\subset [\varepsilon, \|B\|], \end{aligned} \quad 157$$

Es muss noch gezeigt werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}} (B_n) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} (B). \quad 158$$

Angenommen dies wäre nicht so, dann müsste ein Abstand $\delta > 0$ existieren, sodass ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle Folgeindizes $n > N$ gilt:

$$\left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}} (B_n) - \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} (B) \right| \geq 2\delta. \quad 159$$

Wir werden für jedes Γ_n einen weiteren endlichen Quotienten Γ'_n von Γ_n konstruieren, sodass die induzierten Matrizen $B'_n := (\psi'_n)_* B \in \mathbb{C}[\Gamma'_n]^{k \times k}$ die Approximation

$$\left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma'_n)}^{\text{FKr}}(B'_n) - \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(B_n) \right| < \delta \quad 160$$

erfüllen. Unser Zwischenziel ist es diesen zu konstruieren. Das machen wir induktiv:

- Für $n = 1$: Wählen wir einen kofinalen Turm von endlichen Quotienten von Γ_1 :

$$\Gamma_1 > \dots > \Gamma_{1,m} > \dots > \Gamma_{1,1} > \Gamma_{1,0} \quad 161$$

Wir haben die induzierten Matrizen $B_{i,j} = (\psi_{1,j})_* B \in \mathbb{C}[\Gamma_{1,j}]^{k \times k}$ für $j \in \mathbb{N}$. Jede dieser Matrizen hat $\sigma(B_{i,j}) \subset [\varepsilon, \|B_{i,j}\|]$ und wir können nach Lück[32, Thm. 3.4 (3)]

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_{1,j})}^{\text{FKr}}(B_{i,j}) = \det_{\mathcal{R}(\Gamma_1)}^{\text{FKr}}(B_1) \quad 162$$

anwenden. Weil die $\Gamma_{1,j}$ alle können wir ein j wählen, sodass $\Gamma_{1,j} := \Gamma_{1,j}$ die gewünschte Approximation erfüllt, also

$$\left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma_{1,j})}^{\text{FKr}}(B_{i,j}) - \det_{\mathcal{R}(\Gamma_1)}^{\text{FKr}}(B_1) \right| < \delta. \quad 163$$

- Für $n \mapsto n + 1$: Angenommen wir haben bereits Γ'_{n-1} konstruiert. Analog zu $n = 1$ wählen wir einen kofinalen Turm von endlichen Quotienten von Γ_n , jedoch mit einer Einschränkung :

$$\begin{aligned} \Gamma_n > \dots > \Gamma_{n,m} > \dots > \Gamma_{n,1} > \Gamma_{n,0} \\ \text{wobei } \Gamma_{n,0} &= \Gamma'_{n-1} \end{aligned} \quad 164$$

und somit haben wir $\Gamma'_n := \Gamma_{n,j}$ für ein $j \in \mathbb{N}$.

Somit haben wir nun einen kofinalen Turm von endlichen Quotienten Γ'_n von G . Nutzen wir Lück erneut, so haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma'_n)}^{\text{FKr}}(B'_n) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(B). \quad 165$$

Und unsere Annahme aus Gleichung 159 widerlegt, weil wir n groß genug wählen können, sodass:

$$\begin{aligned} \left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma'_n)}^{\text{FKr}}(B'_n) - \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(B) \right| &\leq \left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma'_n)}^{\text{FKr}}(B'_n) - \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(B_n) \right| \\ &\quad + \left| \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(B_n) - \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(B) \right| \\ &< 2\delta \end{aligned} \quad 166$$

□

Beweis zu Proposition 2.50: Sei $\varepsilon > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}((\psi_n)_* A_G) &\stackrel{h_1}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \det_{\mathcal{R}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}((\psi_n)_* (A_G^* A_G + \varepsilon \cdot 1))^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{h_2}{=} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A_G^* A_G + \varepsilon \cdot 1)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad 167$$

wobei

$$\begin{aligned} h_1 &: \text{Nach Lemma 2.52} \\ h_2 &: \text{Nach Lemma 2.49} \end{aligned} \quad 168$$

□

Proposition 2.53 (*J. Dubois, S. Friedl, and W. Lück [3, Prop. 2.4]*). Sei G eine Gruppe und sei $A \in \mathbb{R}[G]^{k \times k}$. Die folgenden Aussagen gelten:

1. Wenn wir zwei Spalten oder zwei Zeilen von A vertauschen, bleibt die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante unverändert.
2. Wenn $H < G$ mit $[G : H] < \infty$ und $\iota : H \rightarrow G$ ist, gilt

$$\det_{\mathcal{R}(H)}^{\text{FKr}}(\iota_*(A)) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A)^{[G:H]}. \quad 169$$

3. (5) Falls G eine Untergruppe einer Gruppe H ist, dann können wir $A \in \mathbb{R}[H]^{k \times k}$ betrachten und es gilt

$$\det_{\mathcal{R}(H)}^{\text{FKr}}(A) = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(A). \quad 170$$

Beweis: (1) Es ist klar, dass das Vertauschen von Spalten oder Zeilen die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante nicht verändert, da dies die Spektraldichtefunktion nicht verändert. [22, Thm. 1.12] und [22, 3.14] \square

Lemma 2.54 (*J. Dubois, S. Friedl, and W. Lück [3, Lem. 9.3]*). Sei die folgende kurze exakte Folge in Grp gegeben:

$$0 \longrightarrow H \hookrightarrow G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Wir wählen $\mu \in G$ mit $\varphi(\mu) = 1$. Angenommen, wir haben eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} P_1 & * & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t^r \nu \text{id}_n & 0 \\ * & X & Y & * \\ P_3 & * & * & P_4 \end{pmatrix} \quad 171$$

wobei $(P_i)_{i=1,2,3,4}$ Matrizen über $\mathbb{Z}[G]$ sind, $\nu \in G$ die Bedingung $\varphi(\nu) = r$ erfüllt und $X, Y \in \mathbb{Z}[H]^{n \times n}$ sind. (* sind immer beliebige passende Matrizen über $\mathbb{Z}[H]$) Dann existiert ein $A \in \mathbb{Z}[H]^{(r+1)n \times (r+1)n}$, sodass

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t^r \nu \text{id}_n & 0 \\ * & X & Y & * \\ P_3 & * & * & P_4 \end{pmatrix} = \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & P_2 \\ * & A + t\mu \begin{pmatrix} \text{id}_{rn} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & * \\ P_3 & * & P_4 \end{pmatrix} \quad 172$$

für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

Beweis: Wir starten mit

$$\begin{aligned}
& \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t^r \nu \text{id}_n & 0 \\ * & X & Y & * \\ P_3 & * & * & P_4 \end{pmatrix} \\
&= \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}} \left(\begin{pmatrix} P_1 & * & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t^r \nu \text{id}_n & 0 \\ * & X & Y & * \\ P_3 & * & * & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu^{-1} \mu^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t^r \mu^r \text{id}_n & 0 \\ * & X & Y \nu^{-1} \mu^r & * \\ P_3 & * & * & P_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{173}$$

Wir können die dritte Spalte nach Proposition 2.53 (4) mit $\nu^{-1} \mu^r$ multiplizieren.

$$= \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & 0 & 0 & 0 & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & 0 & \dots & 0 & -t^r \mu^r \text{id}_n & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_n & \ddots & & -t^{r-1} \mu^{r-1} \text{id}_n & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \text{id}_n & -t \mu \text{id}_n & 0 \\ * & X & \dots & 0 & 0 & Y \nu^{-1} \mu^r & * \\ P_3 & * & 0 & 0 & 0 & * & P_4 \end{pmatrix} \tag{174}$$

Indem wir Proposition 2.53 (1) und (3) anwenden, ist es komplett klar, dass wir die Identitätsmatrix in der Mitte der Matrix einfügen können und die Werte in der zweiten Spalte von rechts hinzufügen können.

$$= \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} P_1 & * & 0 & 0 & 0 & * & P_2 \\ 0 & \text{id}_n & -t \mu \text{id}_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_n & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -t \mu \text{id}_n & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \text{id}_n & -t \mu \text{id}_n & 0 \\ * & X & \dots & 0 & 0 & Y \nu^{-1} \mu^r & * \\ P_3 & * & 0 & 0 & 0 & * & P_4 \end{pmatrix} \tag{175}$$

Mittels Proposition 2.53 (2) und (3) können wir für jeden Block von Block 3 bis Block $r + 1$ sein $-t \mu$ faches auf den darüberliegenden addieren. Nun vertauschen wir die Blockspalten des mittleren $(r + 1) \times (r + 1)$ -Blocks zyklisch via $(1, 2, \dots, r + 1) \mapsto (2, 3, \dots, r + 1, 1)$ und multiplizieren die ersten r Blockzeilen mit -1 . Dadurch wandern die $-t \mu \cdot \text{id}_n$ -Einträge von der oberen Nebendiagonale auf die Hauptdiagonale und wir erhalten die gewünschte Form

$$A + t\mu \begin{pmatrix} \text{id}_{rn} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 176$$

Nach Proposition 2.53 (1) ändern Spaltenvertauschungen und Multiplikation von Zeilen mit -1 die reguläre Fuglede-Kadison-Determinante nicht. \square

Lemma 2.55 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, Lem. 9.4]*). Sei die folgende kurze exakte Folge in Grp gegeben:

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\quad} G \xrightarrow{\quad \varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Sei $\mu \in G$ mit $\varphi(\mu) \neq 0$ und sei $w \in H$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$, dass:

$$\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 1 & -w \end{pmatrix} = \max\{1, t\}. \quad 177$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 1 & -w \end{pmatrix} &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 1 & -w \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 0 & t\mu - w \end{pmatrix} \\ &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -w^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 0 & t\mu - w \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}} \begin{pmatrix} 1 & -t\mu \\ 0 & 1 - tw^{-1}\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 178$$

Es gilt $\varphi(w^{-1}\mu) \neq 0$, insbesondere ist $w^{-1}\mu$ ein Element von G mit unendlicher Ordnung. Das Lemma folgt unmittelbar aus \square

2.3.2 Fuglede-Kadison-Determinante und das Mahler-Maß

Die direkte Berechnung der Fuglede-Kadison-Determinante einer Matrix über einem Gruppenring $\mathbb{R}[G]$ ist im Allgemeinen sehr schwierig [3, S. 11]. Ist G jedoch frei und abelsch, so lässt sich die Fuglede-Kadison-Determinante durch das *Mahler-Maß* (benannt nach Kurt Mahler, ein Australischer Mathematiker deutschen Ursprungs, 1903 - 1988) ausdrücken [3, Abschnitt 2.7], [22, Aufgabe 3.8]. Zur Motivation dessen möchten wir ausdrücklich auf Beispiel 2.30 mit Fourier-Transformation verweisen.

Definition 2.56 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 11]*). Sei $p \in \mathbb{R}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}]$ ein multivariates Laurent-Polynom. Das *Mahler-Maß* von p ist definiert als

$$\begin{aligned} m(\cdot) &: \mathbb{R}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}] \rightarrow (0, \infty) \\ m(0) &:= 0 \\ m(p) &:= \exp \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \ln |p(e^{it_1}, \dots, e^{it_k})| dt_1 \dots dt_k. \end{aligned} \quad 179$$

Allgemeiner: Ist H eine freie abelsche Gruppe von Rang k und $p \in \mathbb{R}[H]$ mit $p \neq 0$, so wählen wir einen Isomorphismus $f: \mathbb{Z}^k \rightarrow H$, welcher einen Isomorphismus $\mathbb{R}[\mathbb{Z}^k] = \mathbb{R}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}] \simeq \mathbb{R}[H]$ induziert, und setzen $m(p) := m(f_*^{-1}(p))$. Dies ist unabhängig von der Wahl von f . Für die triviale Gruppe $H = 1$ und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $m(p) = |p|$.

Für Laurent-Polynome $p, q \neq 0$ gilt, dass das Mahler-Maß multiplikativ ist:

$$m(pq) = m(p) \cdot m(q). \quad 180$$

Für ein univariates Laurent-Polynom $p(z) = D \cdot z^n \cdot \prod_{i=1}^l (z - b_i)$ mit $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert die *Jensensche Formel* [3, S. 11, Gl. (2)], [35, Lem. 1.9] die explizite Darstellung

$$m(p) = |D| \cdot \prod_{i=1}^l \max\{1, |b_i|\}. \quad 181$$

Korollar 2.57 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 13]*). *Angenommen $g \in G$ hat unendliche Ordnung und sei $t \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt*

$$\det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}}(1 - tg) = \max\{1, t\}. \quad 182$$

Beweis: Nach Proposition 2.53 haben wir $\det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}}(1 - tg) = \det_{\mathcal{X}(\text{span}(g))}^{\text{FKr}}(1 - tg)$. Nach Lemma 2.6 wissen wir, dass $\det_{\mathcal{X}(\text{span}(g))}^{\text{FKr}}(1 - tg)$ gleich dem Mahler-Maß von $1 - tg$ ist, betrachtet als Polynom in g . Nach (2) haben wir $m(1 - tg) = m((-t)(g - t^{-1})) = |-t| \cdot \max\{1, t^{-1}\} = \max\{1, t\}$. \square

Der folgende Zusammenhang zwischen der regulären Fuglede-Kadison-Determinante und dem Mahler-Maß ist zentral für die Berechenbarkeit von ℓ^2 -Torsionen.

Lemma 2.58 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, Lemma 2.6, S. 12]*). *Sei H eine freie abelsche Gruppe und $A \in \mathbb{R}[H]^{k \times k}$. Dann gilt*

$$\det_{\mathcal{X}(H)}^{\text{FKr}}(A) = m(\det_{\mathbb{R}[H]}(A)), \quad 183$$

wobei $\det_{\mathbb{R}[H]}(A) \in \mathbb{R}[H]$ die gewöhnliche Determinante der Matrix A ist.

Beweis: Die Aussage, dass A genau dann vollen Rang hat, wenn $\det_{\mathbb{R}[H]}(A) \neq 0$, folgt daraus, dass Rechtsmultiplikation mit A auf $\mathbb{R}[H]^k$ genau dann injektiv ist. Für $\det_{\mathbb{R}[H]}(A) \neq 0$ ist die Gleichheit $\det_{\mathcal{X}(H)}^{\text{FKr}}(A) = \det_{\mathcal{X}(H)}^{\text{FK}}(A) = m(\det_{\mathbb{R}[H]}(A))$ in [36, Abschnitt 1.2] bewiesen, aufbauend auf [22, Aufgabe 3.8]. \square

2.4 ℓ^2 -Torsion

Nachdem wir nun die Fuglede-Kadison-Determinante $\det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FK}}$ eingeführt haben und die kanonische unitäre Darstellung $\cdot \lll \cdot$ definiert haben, können wir die ℓ^2 -Torsion definieren. Starten wir mit einem zusammenhängenden, endlichen G -CW-Komplex X und betrachten den $\cdot \lll \cdot$ -getwisteten Kettenkomplex

$$\begin{aligned} C(X; \cdot \lll \cdot) &\in \mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{HilbMod}^{\text{fg}}) \\ C(X; \cdot \lll \cdot) &= \ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C(X) \end{aligned} \quad 184$$

wie aus Definition 2.18. Wir möchten unter gewissen technischen Voraussetzungen an das resultierende Objekt in $\mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{HilbMod}^{\text{fg}})$ die ℓ^2 -Torsion definieren.

Sei $C \in \mathbf{Ch}_b(\mathcal{L}(G)\mathbf{HilbMod}^{\text{fg}})$ mit ∂ die dazugehörige Randabbildung. Wir erinnern an die Definition der (*reduzierten*) ℓ^2 -Betti Zahlen

$$b_k^{(2)}(C) := \dim_{\mathcal{X}(G)} H_k^{(2)}(C), \quad 185$$

wobei

$$H_k^{(2)}(C) := \ker(\partial_k) / \overline{\text{im}(\partial_{k+1})} \quad 186$$

die (reduzierte) ℓ^2 -Homologie[22, 1.1.7], [22, Def. 1.16].

Definition 2.59 (J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 13], W. Lück [22]). Wir nennen C :

- (schwach) ℓ^2 -azyklisch, wenn alle ℓ^2 -Betti-Zahlen verschwinden: $b_k^{(2)}(C) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
- von Determinantenklasse, wenn jeder Randoperator ∂_k von Determinantenklasse nach Definition 2.33 ist, das heißt $\int_{(0,\infty)} \ln(\lambda) dF_{\partial_k} > -\infty$ für alle k ;
- \det - ℓ^2 -azyklisch, wenn er schwach ℓ^2 -azyklisch und von Determinantenklasse ist.

Beispiele für \det - ℓ^2 -azyklische Kettenkomplexe sind:

- $\ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C(X)$ für einen endlichen zusammenhängenden G -CW-Komplex X mit $\pi_1(X) = G$.
- $\ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C(\tilde{M})$ für eine asphärische geschlossene orientierbare n -Mannigfaltigkeit M mit $\pi_1(M) = G$ und verschwindendem simplizialen Volumen³ $\|M\|_1 = 0$.

Eine offene Vermutung ist, ob für jede asphärische geschlossene orientierbare n -Mannigfaltigkeit M mit $n \geq 1$ und verschwindendem simplizialen Volumen $\|M\|_1 = 0$ die ℓ^2 -Torsion $\rho^{(2)}(\tilde{M})$ verschwindet[39, S. 59].

Definition 2.60 (J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, S. 13-14], S. Friedl und W. Lück [7, S. 25], H. Kammeyer [13, S. 132]). Die ℓ^2 -Torsion von C ist

$$\tau^{(2)}(C) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} \partial_k \right)^{(-1)^k} \in [0, \infty) \quad 187$$

Ist (C, ∂_*) nicht \det - ℓ^2 -azyklisch, so setzen wir $\tau^{(2)}(C) := 0$.

Je nach Autor und Kontext wird auch die *additive ℓ^2 -Torsion*

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(C) &:= -\ln \tau^{(2)}(C) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \ln \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}} \partial_k \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad 188$$

verwendet[13, S. 140], [22], oder nur der Betrag betrachtet. Eine unterschiedliche Konvention bezüglich des Vorzeichens, beziehungsweise des Exponenten verwendet. Hieraus erhalten wir direkt die ℓ^2 -Torsion eines G -CW-Komplexes, beziehungsweise einer passenden Mannigfaltigkeit N :

Definition 2.61 (Y. Liu [8, S. 985]). Sei N eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit und $\gamma \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi_1(N), G)$. Wir nennen (N, γ) *schwach ℓ^2 -azyklisches Paar*, wenn die Überlagerung $\bar{N}_{\ker(\gamma)}$ von N , die $\ker(\gamma)$ entspricht, als $\text{im}(\gamma)$ -Raum verschwindende ℓ^2 -Betti-Zahlen besitzt: $b_k^{(2)}(\bar{N}_{\ker(\gamma)}; \text{im}(\gamma)) = 0$ für alle k .

Die Wahl einer CW-Struktur auf N ist hierbei irrelevant, da ℓ^2 -Betti-Zahlen Homotopieinvarianten sind, wie folgendes Resultat zeigt:

Um mit der ℓ^2 -Torsion warm zu werden, möchten wir diese an einem Beispiel prüfen.

Beispiel. Der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ ist asphärisch mit $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$. Da T^2 nichttriviale Selbstüberlagerungen beliebigen Grades besitzt (z.B. $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^d, z_2)$ für

³Für die Definition des simplizialen Volumen siehe[37, S. 216] und [38]

$d \geq 2$) und das simpliziale Volumen eine nicht-negative reelle Zahl ist, welche multiplikativ unter endlichen Überlagerungen nach [38, 4.1] ist, folgt $\|T^2\|_1 = 0$.

Der CW-Komplex von T^2 hat eine 0-Zelle, zwei 1-Zellen a, b und eine 2-Zelle (siehe Abbildung 6). Der zelluläre Kettenkomplex der universellen Überlagerung ist

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^2] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^2]^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^2] \longrightarrow 0$$

mit $\partial_2 = (1-t \ s-1)^T$ und $\partial_1 = (s-1 \ t-1)$, wobei $\mathbb{Z}^2 = \text{span}\{s, t\}/[s, t]$. Hierbei ist $\partial_1 = (s-1 \ t-1)$ klar, jedoch ∂_2 nicht direkt. Die 2-Zelle wird entlang des Kommutators $aba^{-1}b^{-1}$ angeklebt und die Fox-Ableitungen der Relation $r = sts^{-1}t^{-1}$ liefern $\partial_2 = (1-t \ s-1)^T$. Für den Fox-Kalkül verweisen wir auf [40, S. 547, (A) und §2] und dass ∂_2 durch die Fox-Ableitungen hier gegeben ist finden wir in [41, S. 2]. Konkret berechnet man im freien Gruppenring $\mathbb{Z}[F(s, t)]$ mit der Leibnizregel⁴ $D(uv) = D(u) + uD(v)$ und $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s} &= 1 \cdot \frac{\partial s}{\partial s} + s \cdot \frac{\partial t}{\partial s} + st \cdot \frac{\partial s^{-1}}{\partial s} + sts^{-1} \cdot \frac{\partial t^{-1}}{\partial s} \\ &= 1 \cdot 1 + s \cdot 0 + st \cdot (-s^{-1}) + sts^{-1} \cdot 0 \\ &= 1 - sts^{-1}. \end{aligned} \tag{189}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= 1 \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + s \cdot \frac{\partial t}{\partial t} + st \cdot \frac{\partial s^{-1}}{\partial t} + sts^{-1} \cdot \frac{\partial t^{-1}}{\partial t} \\ &= 1 \cdot 0 + s \cdot 1 + st \cdot 0 + sts^{-1} \cdot (-t^{-1}) \\ &= s - sts^{-1}t^{-1}. \end{aligned} \tag{190}$$

Projiziert man auf $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^2]$ via $sts^{-1}t^{-1} \mapsto 1$ (also $sts^{-1} = t$), so erhält man die Fox-Jacobi-Matrix

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial r}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - sts^{-1} \\ s - sts^{-1}t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ s - 1 \end{pmatrix}. \tag{191}$$

Aus dem selben Selbstüberlagerungs-Argument folgt $b_n^{(2)}(\tilde{T}^2) = 0$ für alle $n \geq 0$ [13, Korollar 3.35], sodass $\rho^{(2)}(T^2)$ definiert ist. Per Poincaré-Dualität heben sich die Determinantenbeiträge auf:

$$\rho^{(2)}(T^2) = \sum_p (-1)^p \ln \det_{\mathcal{X}(\mathbb{Z}^2)}^{\text{FK}} \partial_p = 0. \tag{192}$$

Die Vermutung ist für T^2 also bestätigt.

Theorem 2.62 (H. Kammeyer [13, Thm. 6.9]). *Angenommen, alle auftretenden G -CW-Komplexe sind von Determinantenklasse.*

1. *Homotopieinvarianz. Angenommen, die endlichen, freien, ℓ^2 -azyklischen G -CW-Komplexe X und Y sind G -homotopieäquivalent und die Determinantenvermutung gelte für G . Dann ist $\rho^{(2)}(X) = \rho^{(2)}(Y)$.*
2. *Additivität. Sei X ein G -CW-Pushout von endlichen, freien G -CW-Komplexen*

⁴Die Leibnizregel ist definiert in [40, S. 550 (1.2)] als $D(uv) = D(u) \cdot v^\circ + u \cdot D(v)$, wobei $(\cdot)^\circ$ den induzierten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[F(a, b)] \rightarrow \mathbb{Z}[1]$ gegeben dem Gruppenhomomorphismus $\circ : F(a, b) \rightarrow 1$ beschreibt. Die Inversionsregel $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g)$ folgt hieraus mittels der Additivität von D .

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \longrightarrow & X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_2 & \longrightarrow & X
\end{array}$$

wobei die obere Abbildung eine Inklusion als G -invarianter Subkomplex ist. Falls drei der Räume ℓ^2 -azyklisch sind, so ist es auch der vierte, und wir haben

$$\rho^{(2)}(X) = \rho^{(2)}(X_1) + \rho^{(2)}(X_2) - \rho^{(2)}(X_0). \quad 193$$

3. Multiplikativität. Sei $X \rightarrow Y$ eine d -blättrige Überlagerung endlicher CW-Komplexe, sodass \tilde{X} oder \tilde{Y} ℓ^2 -azyklisch ist. Dann ist es auch der jeweils andere und es gilt

$$\rho^{(2)}(\tilde{X}) = d \cdot \rho^{(2)}(\tilde{Y}). \quad 194$$

4. Produkte. Seien X und Y endliche, freie G - bzw. H -CW-Komplexe, sodass X ℓ^2 -azyklisch ist. Dann ist auch der $(G \times H)$ -CW-Komplex $X \times Y$ ℓ^2 -azyklisch und es gilt

$$\rho^{(2)}(X \times Y) = \rho^{(2)}(X) \cdot \chi(H \setminus Y). \quad 195$$

5. Poincaré-Dualität. Sei X ein endlicher, freier, ℓ^2 -azyklischer G -CW-Komplex, sodass $G \setminus X$ eine orientierbare, geschlossene $2n$ -Mannigfaltigkeit ist. Dann ist $\rho^{(2)}(X) = 0$.

6. Hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Angenommen, $G \setminus X$ ist eine $(2n + 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es werde vorausgesetzt, dass sie entweder geschlossen und hyperbolisch ist oder einen Rand besitzt und das Innere eine hyperbolische Metrik mit endlichem Volumen trägt. Dann gilt

$$\rho^{(2)}(X) = (-1)^n C_n \cdot \text{vol}(G \setminus X) \quad 196$$

für eine positive Konstante C_n , die nur von der Dimension abhängt.

Wir werden keine Beweise hierfür angeben, da dies zu viel Platz in Anspruch nehmen würde. Dennoch gibt es eine Auflistung der relevantesten Quellen in [13, Thm. 6.9].

2.4.1 Zusammenhang mit der Reidemeister-Torsion

Sei H eine freie abelsche Gruppe und $\mathbb{R}(H) := \text{frak}(\mathbb{R}[H])$. In Beispiel 2.20 konnten wir bereits leichte Ähnlichkeiten von der Reidemeister-Torsion zu der ℓ^2 -Torsion erahnen (dort jedoch mit $\mathbb{Q}(t)$). Eine Brücke zwischen diesen Torsionsinvarianten bildet das Mahler-Maß (siehe Definition 2.56) mittels der folgenden Proposition:

Proposition 2.63 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, Proposition 3.3, S. 15]*). Angenommen es gilt $H \in \mathbf{Ab}$ ist eine abelsche Gruppe, welche frei ist ($H_{\text{tors}} = 0$), und $C \in \mathbf{Ch}_b(\mathbb{R}[H]^{\text{fg}})$ ist ein basierter Kettenkomplex, dann gilt

$$\tau^{(2)}(C) = m(\mathbb{R}(H) \otimes_{\mathbb{R}[H]} C) \quad 197$$

Beweis: Die Aussage folgt aus [3, Proposition 3.3], welche wiederum auf [22, Lemma 1.34] und Lemma 2.58 beruht. Das Ergebnis folgt dann durch Auflösen des alternierenden Produkts in der Definition der ℓ^2 -Torsion. \square

3 3-Mannigfaltigkeiten

Unsere strenge Annahme, dass jede 3-Mannigfaltigkeit N glatt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf stückweise-linear oder nur auf die Forderung, eine topologische Mannigfaltigkeit zu sein, abschwächen. Nach dem klassischen Resultat von Moise[42] hat jede topologische n -Mannigfaltigkeit eine eindeutige Triangulierung zu einem Simplicialkomplex (die *Triangulierbarkeitsvermutung* gilt), dessen kombinatorischer Typ bis auf eine gemeinsame Unterteilung eindeutig ist (die *Hauptvermutung* gilt) für alle $n \leq 3$. Somit hat jede 3-Mannigfaltigkeit eine eindeutige stückweise lineare Struktur und weil jeder Simplicialkomplex ein CW-Komplex ist, auch eine eindeutige CW-Komplex-Struktur. Jede Triangulierung kann zudem in eine glatte Struktur überführt werden, die bis auf Diffeomorphismus eindeutig ist, woraus folgt, dass jede 3-Mannigfaltigkeit auch eine eindeutige glatte Struktur besitzt [43]. Wir können somit annehmen, dass jede 3-Mannigfaltigkeit glatt ist.

Definition 3.1. Eine 3-Mannigfaltigkeit N hat *toroidalen Rand*, wenn

$$\partial N = \bigcup_i T_i \tag{198}$$

mit $T_i \cong T^2$ für alle i .

Beispiel. Ein Beispiel einer 3-Mannigfaltigkeit mit leerem Rand ist der 3-Torus $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$: er ist kompakt, zusammenhängend und orientierbar.

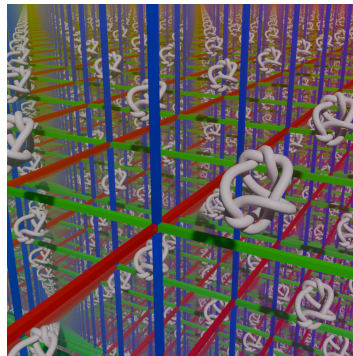
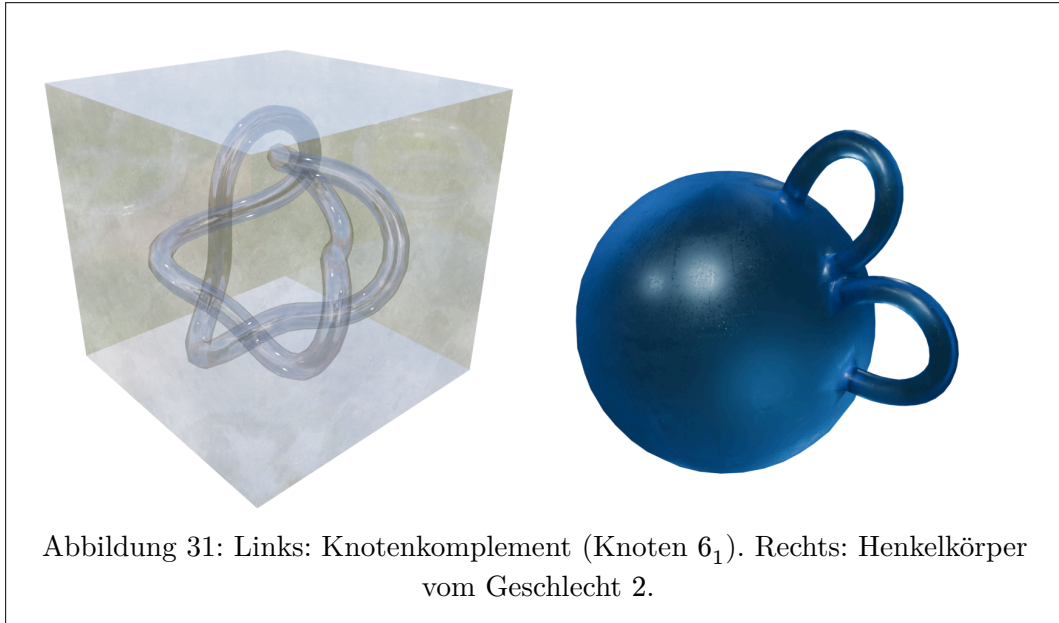


Abbildung 30: Die 3-Mannigfaltigkeit T^3 . Wir betrachten $[0, 1]^3$ und identifizieren die gegenüberliegenden Seiten. Die 1-Zellen sind hierbei gefärbt dargestellt und eine eingebettete tubuläre Umgebung des 8_9 Knotens ist zur Kenntlichmachung der Orientierung eingebettet.

Beispiel. Ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit toroidalem Rand ist das Knotenkomplement $X_K = S^3 \setminus \nu(K)$ eines nicht-trivialen Knotens $K \subseteq S^3$: es ist kompakt, zusammenhängend, orientierbar, und sein Rand $\partial X_K \cong T^2$ ist ein (inkompressibler) Torus. Im Gegensatz dazu hat der Henkelkörper vom Geschlecht 2 Rand $\partial H_2 \cong \Sigma_2$, also eine Fläche vom Geschlecht 2, und damit keinen toroidalen Rand.



Da wir im Folgenden häufig riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachten, erinnern wir uns zunächst an die zugrundeliegende Definition und den Metrikbegriff.

Definition 3.2 (*P. Petersen [44, S. 2]*). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *riemannsche Metrik* auf M ist eine glatte von $p \in M$ abhängige Familie von Skalarprodukten

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}. \quad 199$$

Das bedeutet, für zwei glatte Vektorfelder X und Y ist $g_p(X|_p, Y|_p)$ eine in p glatte Funktion. Das Paar (M, g) heißt *riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Definition 3.3 (*W. H. Jaco und P. B. Shalen [45]*). Für eine k -Mannigfaltigkeit N eingebettet in eine n -Mannigfaltigkeit M mit $k < n$ heißt N *eigentlich eingebettet*, wenn

$$N \cap \partial M = \partial N \quad 200$$

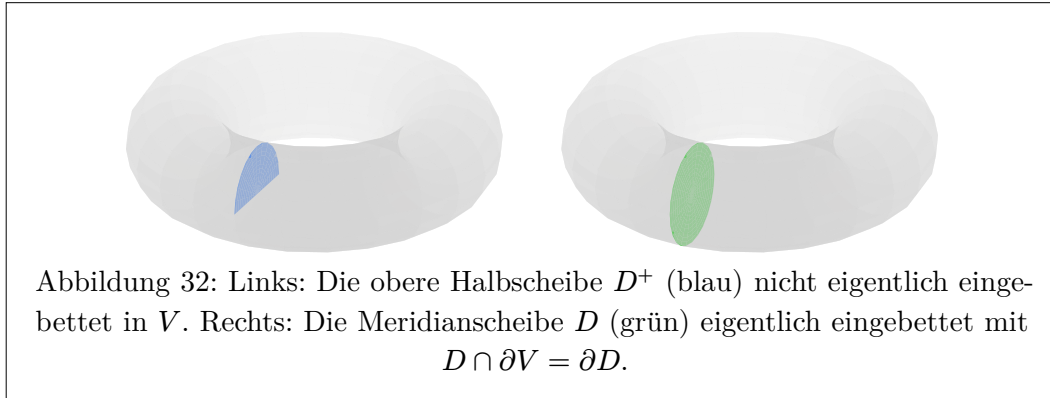
Betrachten wir den Volltorus $V := S^1 \times D^2$ mit $\partial V = T^2$. Für die obere Halbscheibe

$$D^+ := \{1\} \times \{(x, y) \in D^2 \mid y \geq 0\} \hookrightarrow V \quad 201$$

gilt

$$D^+ \cap \partial V = \{1\} \times \{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\} \neq \partial D^+, \quad 202$$

da der Durchmesser $\{1\} \times [-1, 1] \times \{0\}$ in ∂D^+ , aber nicht in ∂V liegt. Hingegen ist die Meridianscheibe $D := \{1\} \times D^2 \hookrightarrow V$ eigentlich eingebettet, denn $D \cap \partial V = \{1\} \times S^1 = \partial D$.



In der Literatur finden sich zwei ähnliche, aber nicht äquivalente Definitionen für eigentliche Einbettungen. Eine Andere wäre zu fordern, dass die Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind bezüglich der Einbettung $\iota : N \rightarrow M$, so wie [46]. Man kann zeigen, dass für kompakte N beide Definitionen äquivalent sind [47] und wir verwenden daher obige Definition.

In der Herleitung von Proposition 3.21 haben wir die *transversalen* eingebetteter Flächen zu einer gegebenen Kohomologieklassse $\varphi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ betrachtet. Dafür benötigen wir jedoch folgende Definition:

Definition 3.4 (V. Guillemin und A. Pollack [48, S. 28]). Seien X und Z Untermannigfaltigkeiten einer glatten Mannigfaltigkeit Y . Wir sagen X und Z *schneiden sich transversal* (geschrieben $X \pitchfork Z$), wenn für jeden Punkt $x \in X \cap Z$ die Tangentialräume den gesamten Tangentialraum der umgebenden Mannigfaltigkeit aufspannen:

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y). \quad 203$$

Allgemeiner heißt eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *transversal zu einer Untermannigfaltigkeit* $Z \subset Y$ (geschrieben $f \pitchfork Z$), wenn für jedes $x \in f^{-1}(Z)$ gilt:

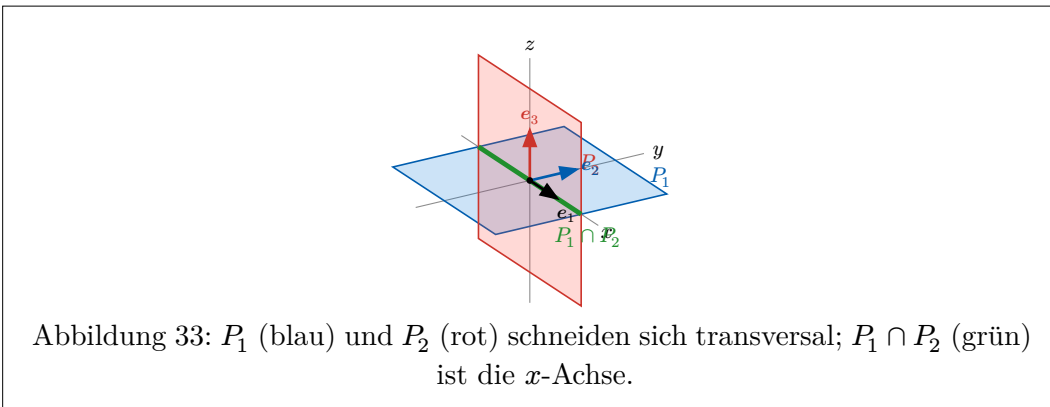
$$\text{im}(df_x) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y), \quad 204$$

wobei $df_x : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ das Pushforward Differential ist.

Beispiel. Für $P_1 := \text{span}\{e_1, e_2\}$ und $P_2 := \text{span}\{e_1, e_3\}$ gilt

$$T_p(P_1) + T_p(P_2) = \text{span}\{e_1, e_2\} + \text{span}\{e_1, e_3\} = \mathbb{R}^3 \quad 205$$

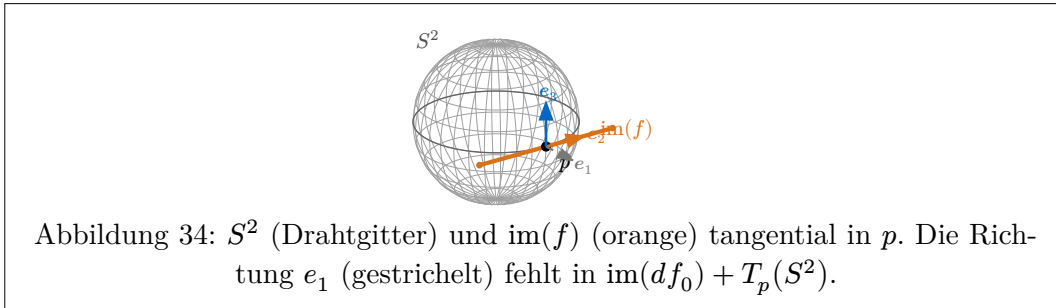
für alle $p \in P_1 \cap P_2$, also $P_1 \pitchfork P_2$.



Beispiel. Für $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (1, t, 0)^T$ ist $f^{-1}(S^2) = \{0\}$ mit $p := f(0) = (1, 0, 0)$. Es gilt $\text{im}(df_0) = \text{span}\{e_2\}$ und $T_p(S^2) = \text{span}\{e_2, e_3\}$, also

$$\text{im}(df_0) + T_p(S^2) = \text{span}\{e_2, e_3\} \neq \mathbb{R}^3, \quad 206$$

da e_1 fehlt. Somit ist f nicht transversal zu S^2 .

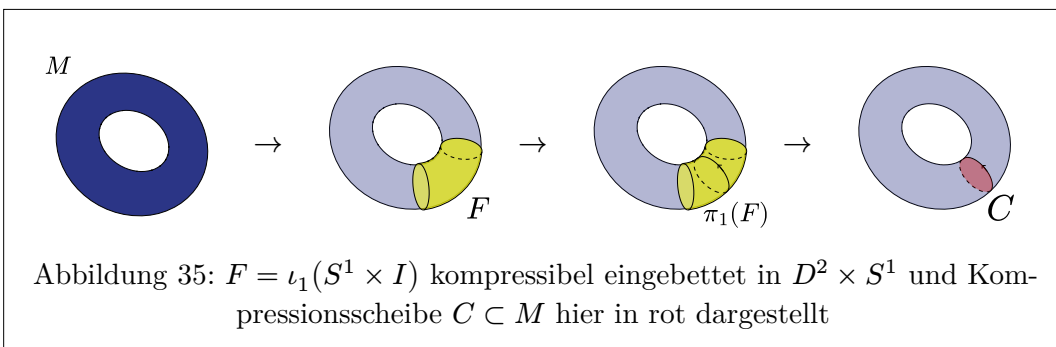


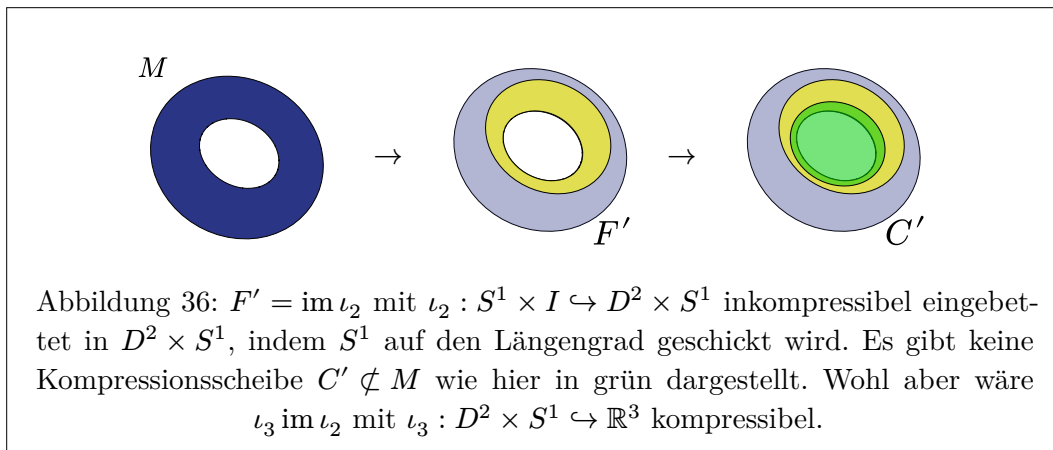
Definition 3.5 (W. Lück [49]). Eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Fläche F , die eigentlich in M eingebettet ist oder in ∂M eingebettet ist, heißt *inkompressibel*, wenn Folgendes gilt:

- $F \hookrightarrow M$ induziert eine Injektion der Fundamentalgruppen $\pi_1(F) \hookrightarrow \pi_1(M)$
- F ist nicht homöomorph zu S^2
- Falls $F = D^2$ ist, gilt $F \not\subset \partial M$ und es gibt kein eingebettetes $D^3 \subset M$ mit $\partial D^3 \subset D^2 \cup \partial M$.

Ist F nicht inkompressibel, so heißt F *kompressibel*.

Wir sagen, ∂M ist *inkompressibel in M* genau dann, wenn ∂M leer ist oder jede Zusammenhangskomponente C von ∂M im obigen Sinne inkompressibel ist.



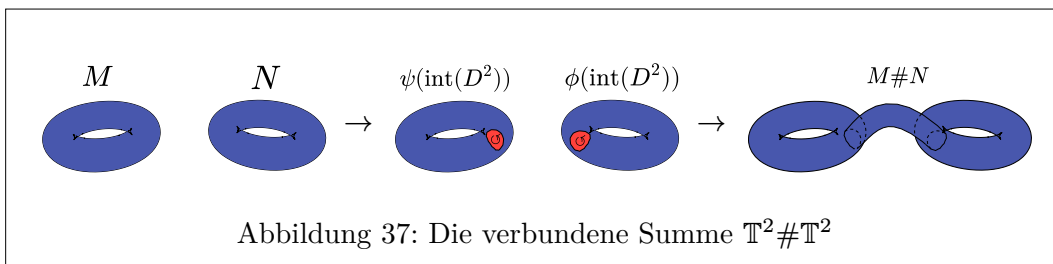


3.1 Primzerlegung und Geometrisierung

Definition 3.6 (I. Bokor u. a. [50]). Seien M und N zwei orientierte n -Mannigfaltigkeiten. Wähle eine orientierungstreue Einbettung $\varphi : D^n \hookrightarrow \text{int}(M)$ und eine orientierungsumkehrende Einbettung $\psi : D^n \hookrightarrow \text{int}(N)$. Die *verbundene Summe* von M und N ist

$$M \# N := \frac{(M \setminus \varphi(\text{int}(D^n))) \sqcup (N \setminus \psi(\text{int}(D^n)))}{\{\varphi(p) \sim \psi(p) \mid p \in S^{n-1}\}}. \quad 207$$

Der Isomorphietyp von $M \# N$ hängt nicht von der Wahl der Einbettungen ab, und es gilt $\partial(M \# N) = \partial M \sqcup \partial N$ nach [51, S. 65].



Definition 3.7 (J. Hempel [52, S. 28]). Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt *irreduzibel*, wenn jede eingebettete 2-Sphäre $S^2 \subset M$ eine 3-Kugel $D^3 \subset M$ berandet.

Beispiele für (nicht unbedingt kompakte) irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten sind:

- \mathbb{R}^3 der reelle euklidische 3-dimensionale Raum
- der 3-Torus T^3
- S^3 die 3 Sphäre
- Die Linsenräume $L_7(1, 1)$ und $L_7(1, 2)$ [49, S. 25]

Gegenbeispiele wären $[-2, 2]^3 \setminus D^3$, oder aber S^2 Faserbündel über S^1 , welche in der Folgenden Definition relevant werden:

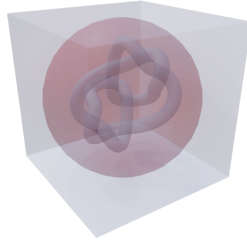


Abbildung 38: Ein Knotenkomplement X_K (hier dargestellt von 8_5) ist irreduzibel. Wir erinnern daran, dass der Quotient $[0, 1]^3/\partial[0, 1] \cong S^3$ ist.

Lemma 3.8 (W. Lück [49, S. 14]). *Insbesondere sind Knotenkomplemente irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten mit inkompressiblem, toroidalem Rand.*

Definition 3.9 (W. Lück [49, S. 11], J. Hempel [52, S. 27]). Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt *prim*, wenn für jede Zerlegung als verbundene Summe $M \cong M_1 \# M_2$ gilt: $M_1 \cong S^3$ oder $M_2 \cong S^3$.

Wir sehen direkt, dass jede irreduzible 3-Mannigfaltigkeit prim ist. Die einzigen prim 3-Mannigfaltigkeiten, welche nicht irreduzibel sind, sind S^2 -Faserbündel über S^1 [52, Lem. 3.13]. Es gibt genau zwei solche Bündel, klassifiziert durch $\pi_0(\text{Diff}(S^2)) \cong \mathbb{Z}/2$ ⁵: das triviale Bündel $S^2 \times S^1$ und das verdrehte Bündel $S^2 \tilde{\times} S^1$, wobei letzteres der Abbildungstorus der Antipodalabbildung $a : S^2 \rightarrow S^2$, $a(x) = -x$ ist.

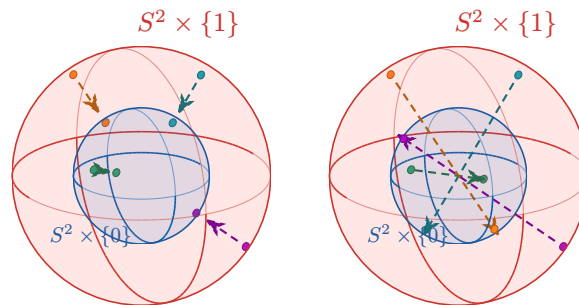


Abbildung 39: Die zwei S^2 -Faserbündel über S^1 . Dargestellt als $S^2 \times [0, 1]$ mit Identifikation der Randsphären. Links: das triviale Bündel $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^1 \twoheadrightarrow S^1$ (Identitätsverklebung). Rechts: das getwistete Bündel $S^2 \hookrightarrow S^2 \tilde{\times} S^1 \twoheadrightarrow S^1$ (Antipodalverklebung). Farblich gleiche Punkte werden identifiziert.

Proposition 3.10. *Jede 3-Mannigfaltigkeit M , die nicht homöomorph zu S^3 ist, besitzt eine Primzerlegung*

$$M \cong M_1 \# M_2 \# \dots \# M_r \quad 208$$

wobei jedes M_i prim und nicht homöomorph zu S^3 ist. Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Permutation der Summanden und Homöomorphismus.

Beweis: Siehe [54, S. 4–7]. Die Existenz folgt induktiv durch Zerlegen entlang wesentlicher⁶ 2-Sphären. Der Prozess terminiert, da die Anzahl disjunkter wesent-

⁵Nach [53, Thm. A] gilt $\text{Diff}(S^2) \cong O(3)$, also $\pi_0(\text{Diff}(S^2)) \cong \mathbb{Z}/2$.

licher Sphären durch die Tetraederanzahl einer Triangulierung beschränkt ist. Die Eindeutigkeit folgt durch Chirurgie entlang der Schnittkreise zweier zerlegender Sphärensysteme. \square

3.2 JSJ-Zerlegung

Außer der Primzerlegung Proposition 3.10 gibt es eine weitere kanonische Zerlegung kompakter, irreduzibler, orientierter 3-Mannigfaltigkeiten. Spalten wir M entlang von Tori statt Sphären, so erhalten wir die sogenannte *JSJ-Zerlegung* nach Jaco-Shalen und Johannson:

Theorem 3.11 (W. Lück [49, S. 21]). *Sei M eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit inkompressiblem Rand.*

1. *Es gibt eine endliche Familie paarweise disjunkter, paarweise nicht-isotoper inkompressibler Tori in M , die nicht zu Randkomponenten isotop sind und M in Stücke zerlegen, die entweder Seifert-Mannigfaltigkeiten oder geometrisch atoroidal sind, das heißt keinen eingebetteten inkompressiblen Torus enthalten (außer möglicherweise parallel zum Rand).*
2. *Eine minimale derartige Familie ist bis auf Isotopie eindeutig.*

wobei wir für dieses Theorem noch die benötigten Begrifflichkeiten einführen müssen:

Definition 3.12 (W. Lück [49, S. 22], P. Scott [55, S. 428]). *Eine Seifert-Mannigfaltigkeit ist eine 3-Mannigfaltigkeit, die eine Zerlegung in disjunkte Kreise, genannt Fasern, besitzt, so dass jede Faser eine Umgebung hat, die eine Vereinigung von Fasern ist und isomorph zu einem gefaserten Volltorus oder einer gefaserten kleinschen Vollflasche ist.*

Diese Definition ist die erweiterte Fassung von Peter Scott[55] aus 1983. In der ursprünglichen Definition von Seifert (und den meisten anderen Autoren bis zu diesem Zeitpunkt), war die gefaserte kleinsche Vollflasche nicht teil der Definition[55, S. 29]. Seitdem ist sie jedoch in den mathematischen Kanon geflossen und wird beispielsweise auch von Lück verwendet[49, S. 14].

Wir konstruieren Seifert-Mannigfaltigkeiten folgendermaßen: Wir betrachten den *trivial gefaserten Volltorus*, was nur der Volltorus gegeben dem Faserbündel $S^1 \rightarrow S^1 \times D^2 \xrightarrow{\circlearrowright} D^2$ ist. Die Fasern sind demnach dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \circlearrowright^{-1} : D^2 &\rightarrow \{ \{ (re^{i\theta_2}, \theta_1) \mid \theta_1 \in S^1 \} \mid re^{i\theta_2} \in D^2 \} \\ \circlearrowright^{-1}(re^{i\theta_2}) &= \{ (re^{i\theta_2}, \theta_1) \mid \theta_1 \in S^1 \} \end{aligned} \tag{209}$$

Ein *gefaerter Volltorus* ist nun eine endliche Überlagerung eines trivial gefaserten Torus, bezüglich der Folierung durch Kreise $S^1 \xrightarrow{\bullet} S^1 \times D^2 \xrightarrow{\circlearrowright} D^2$. Wir können einen solchen gefaserten Volltorus konstruieren, indem wir einen trivial gefaserten Volltorus entlang von $\{\theta_1\} \times D^2$ für ein $\theta_1 \in S^1$ aufschneiden, eine der erhaltenen Scheiben um $\frac{q}{p}$ einer vollen Umdrehung drehen und wieder zusammenkleben. Dieser

⁶Eine Fläche $S \subset M$ heißt *wesentlich*, wenn sie inkompressibel und ∂ -*inkompressibel* ist, d.h. für jede Scheibe $D \subset M$ mit $\partial D = \alpha \cup \beta$ ($\alpha \subset S$, $\beta \subset \partial M$, $\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$) existiert eine Scheibe $D' \subset S$ mit $\alpha \subset \partial D'$ und $\partial D' \setminus \alpha \subset \partial S$ [54, S. 15].

gefaserte Volltorus wird von einem trivial gefaserten Volltorus überdeckt, wobei die Überlagerung p -fach ist.

Eine *gefaserte kleinsche Vollflasche* wird analog konstruiert, indem man einen trivial gefaserten Volltorus entlang von $\{\theta_1\} \times D^2$ aufschneidet und die beiden Scheiben durch eine Spiegelung wieder zusammenklebt. Da alle Spiegelungen der Scheibe zueinander konjugiert sind, gibt es bis auf gefaserten Homöomorphismus nur eine gefaserte kleinsche Vollflasche, und diese wird von einem trivial gefaserten Volltorus zweifach überlagert.

Wir möchten ein Paar solcher Seifert-Mannigfaltigkeiten betrachten und ein Gefühl dafür bekommen, wie sich das Leben in einer dieser 3-Mannigfaltigkeiten anfühlen würde:

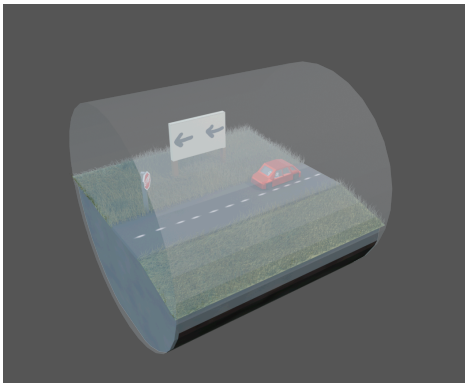


Abbildung 40: Fundamentalbereich eines trivial gefaserten Volltorus. Eine Umgebung einer Faser bildet bspw. die Straße

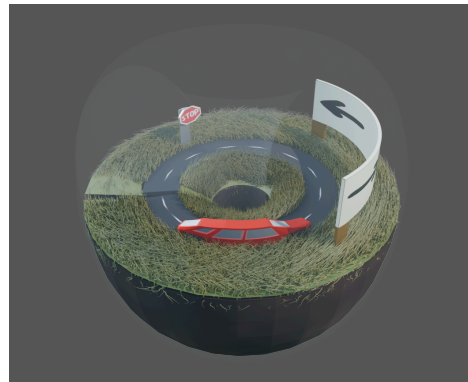


Abbildung 41: Fundamentalbereich nach passender Zusammenklebung der Seiten. Wir erkennen klar, dass die Straße als Faser zu einem Kreis wird

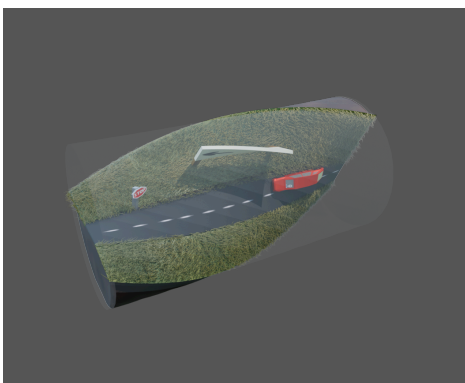


Abbildung 42: Gefasertes Volltorus mit $q/p = 1/3$ vor dem Zusammenkleben der Seiten

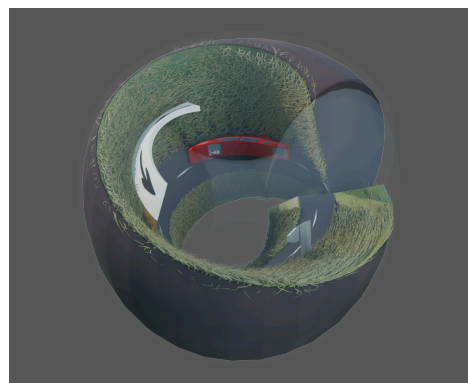


Abbildung 43: Gefasertes Volltorus mit $q/p = 1/3$ nach dem Zusammenkleben der Seiten

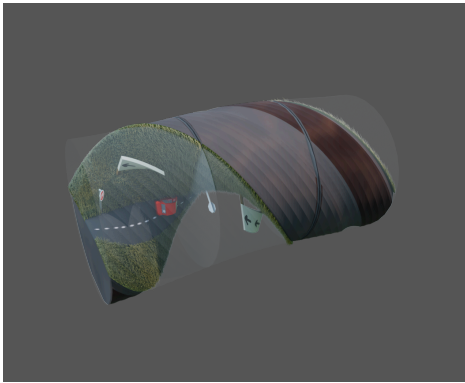


Abbildung 44: Dreifache Überlagerung des gefaserten Volltorus mit $q/p = 1/3$ vor dem Zusammenkleben der Seiten

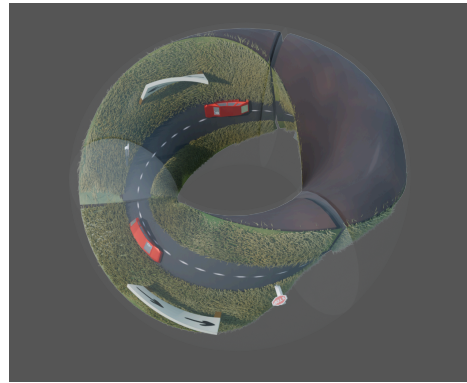


Abbildung 45: Dreifache Überlagerung des gefaserten Volltorus mit $q/p = 1/3$ nach dem Zusammenkleben der Seiten

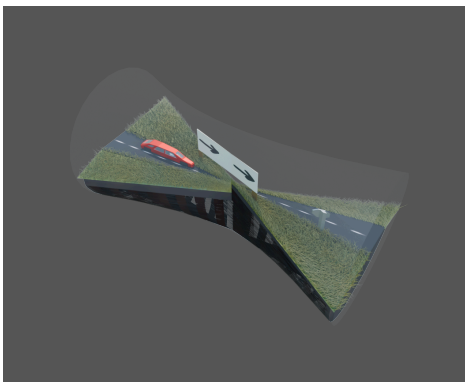


Abbildung 46: Gefaserte kleinsche Vollflasche, bevor wir die Seiten zusammenkleben.

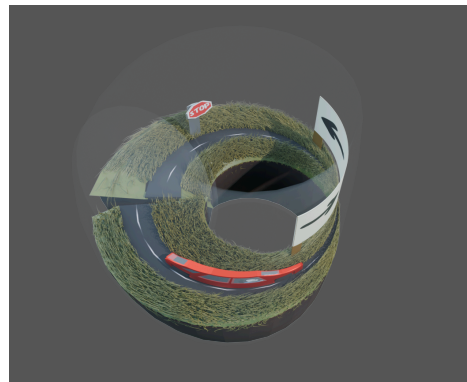


Abbildung 47: Gefaserte kleinsche Vollflasche, nachdem wir die Seiten zusammenkleben. In dieser 3-Mannigfaltigkeit gibt es keine Chiralität, da sie nicht orientierbar ist.

Es ist vollkommen klar, dass jedes S^1 -Faserbündel über einer Fläche eine Seifert-Mannigfaltigkeit ist [55, S. 29] und das folgende Lemma wird hiermit motiviert, dass uns auch eine Rückrichtung liefert:

Lemma 3.13 (W. Lück [49, S. 14]). *Hat eine 3-Mannigfaltigkeit M unendliche Fundamentalgruppe und leeren oder inkompressiblen Rand, so ist M genau dann eine Seifert-Mannigfaltigkeit, wenn es eine endliche Überlagerung $p : M' \rightarrow M$ gibt, die der Totalraum eines S^1 -Hauptfaserbündels über einer kompakten orientierbaren Fläche ist.*

Definition 3.14 (W. Lück [49, S. 22]). Sei M eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit inkompressiblem Rand. Eine minimale Familie paarweise disjunkter, paarweise

nicht-isotoper inkompressibler Tori im Sinne des JSJ-Theorems nennen wir eine *Toralzerlegung* oder *JSJ-Zerlegung* von M .

Wir nennen die Toralzerlegung eine *geometrische Toralzerlegung*, falls die geometrisch atoroidalen Stücke, die keine Seifert-Struktur besitzen, hyperbolisch sind.

Wir möchten nun diese Begriffe Stück für Stück genauer betrachten, definieren und anhand von Beispielen untersuchen.

Definition 3.15 (W. Lück [49]). Eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit heißt *Graphenmannigfaltigkeit*, wenn ihre JSJ-Zerlegung keine hyperbolischen Stücke enthält.

Hierbei ist es nützlich zu wissen,

Proposition 3.16 (W. Lück [49, S. 32]). Eine geschlossene Seifert-Mannigfaltigkeit trägt genau eine Geometrie, und zwar

Geometrie	Charakterisierung von $\pi_1(M)$
S^3	$\pi_1(M)$ ist endlich
\mathbb{R}^3	$\pi_1(M)$ enthält \mathbb{Z}^3 als Untergruppe von endlichem Index
$S^2 \times \mathbb{R}$	$\pi_1(M)$ ist virtuell zyklisch
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	$\pi_1(M)$ enthält eine Untergruppe von endlichem Index, die isomorph zu $\mathbb{Z} \times \pi_1(F)$ für eine geschlossene Fläche F vom Geschlecht ≥ 2 ist
$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$	$\pi_1(M)$ enthält eine Untergruppe von endlichem Index G , die als nicht-triviale zentrale Erweiterung $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow 1$ für eine Fläche F vom Geschlecht ≥ 2 geschrieben werden kann
Nil	$\pi_1(M)$ enthält eine Untergruppe von endlichem Index G , die als nicht-triviale zentrale Erweiterung $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1$ geschrieben werden kann

Definition 3.17 (W. Lück [49, S. 15]). Eine kompakte Mannigfaltigkeit wird *hyperbolisch* genannt, wenn sie eine vollständige Riemannsche Metrik mit konstanter negativer Krümmung besitzt.

Wir haben das folgende nützliche Lemma jedoch dazu:

Lemma 3.18 (W. Lück [49, S. 31]). Sei M eine geschlossene irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit unendlicher Fundamentalgruppe. Dann ist M genau dann hyperbolisch, wenn $\pi_1(M)$ kein $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ als Untergruppe enthält.

3.3 Faserungen über S^1 und die Thurston-Norm

Ein fundamentales Resultat der algebraischen Topologie ist die Klassifizierung der Flächen. Jede nicht leere, kompakte, zusammenhängende topologische 2-Mannigfaltigkeit S (möglicherweise mit Rand) ist bis auf Homöomorphie durch drei Kennzahlen charakterisiert:

- ihre *Orientierbarkeit*,
- ihr *Geschlecht* g_S bei orientierbaren Flächen beziehungsweise ihre *Kreuzkappenanzahl* k_S bei nicht orientierbaren Flächen
- die *Anzahl ihrer Randkomponenten* b_S .

Für eine Fläche gilt dabei die allgemein bekannte Formel

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g_S - b_s & \text{wenn } S \text{ orientierbar} \\ 2 - k_S - b_s & \text{wenn } S \text{ nicht orientierbar} \end{cases} \quad 210$$

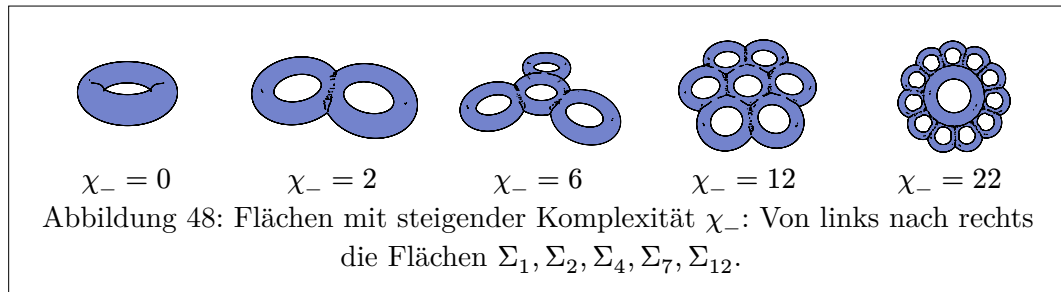
für die Eulercharakteristik $\chi(S)$.

Definition 3.19 (v. Turaev [56]). Für eine Fläche S mit Zusammenhangskomponenten S_1, \dots, S_k definieren wir ihre *Komplexität* als

$$\chi_-(S) := - \sum_{i=1}^k \max(0, -\chi(S_i)) \quad 211$$

Der Name ist relativ selbsterklärend, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel. Für eine n -fache verbundene Summe von Tori $X := \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ gilt somit $\chi_-(X) = 2(n-1)$ [17, S. 393]



Beispiel. Für die Scheibe D^2 gilt

$$\begin{aligned} \chi(D^2) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k \\ &= b_0 - b_1 + b_2 \\ &= 1 - 0 + 0 = 1 \end{aligned} \quad 212$$

und somit $\chi_-(D^2) = -\max(0, -1) = 0$

Jede Kohomologieklassse $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ wird durch eine glatte Abbildung $f: N \rightarrow S^1$ dargestellt, da S^1 ein $K(\mathbb{Z}, 1)$ -Raum ist. Dies ist ein Spezialfall der natürlichen Bijektion

$$H^n(N; G) \cong [N, K(G, n)] \quad 213$$

für jeden Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, n)$ nach [17, Theorem 4.57]. Für $n = 1$ und $G = \mathbb{Z}$ ergibt sich mit $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$

$$H^1(N; \mathbb{Z}) \cong [N, S^1], \quad 214$$

wobei $[N, S^1]$ die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $N \rightarrow S^1$ bezeichnet. Die eigentlich eingebettete Fläche $S := f^{-1}(p)$ für einen regulären Wert $p \in S^1$ (im Sinne des Satzes von Sard[57, S. 11]) repräsentiert das Lefschetz-Dual $\varphi \frown [N, \partial N] = [S]$ zu φ . Eine alternative Sicht bietet hierbei Turaev[56, S. 5] hierzu, indem er $[S]$ als *gewichtete kodimension 1 Unterräume* von N auffasst.

Definition 3.20. Die von William Thurston [58] definierte Thurston-Norm von $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z})$, wobei N eine orientierbare, kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit (möglicherweise leerem) Rand ist, ist gegeben durch

$$x_N(\varphi) := \min\{\chi_- S \mid \varphi \frown [N] = [S, \partial S]\}. \quad 215$$

Beispiel. Sei

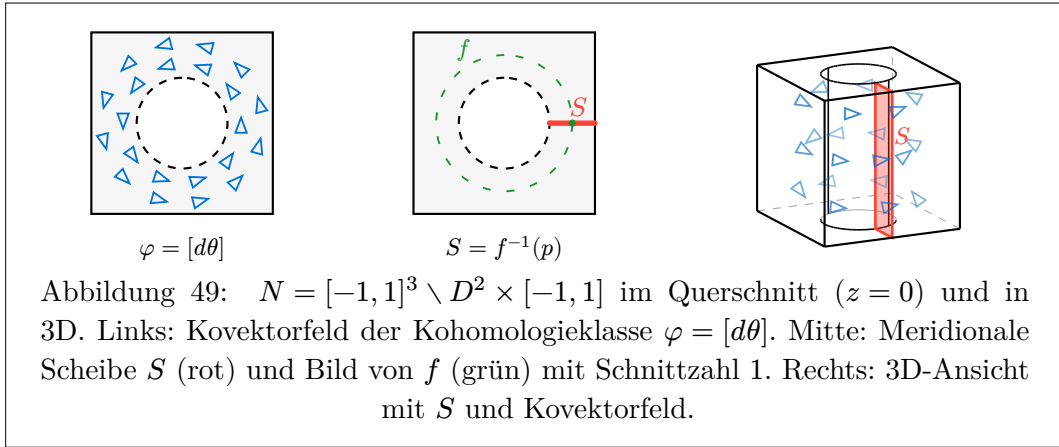
$$N := [-1, 1]^3 \setminus \text{int}(D_{1/2}^2 \times [-1, 1]), \quad 216$$

$$\text{wobei } D_{1/2}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1/4\}.$$

Dann ist $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$ und $H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt durch die Winkel-
form $\varphi = [d\theta]$ um den entfernten Zylinder. Nach Lefschetz-Dualität ist
 $[d\theta] \frown [N, \partial N] = [S] \in H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$ die (per Konstruktion eigentlich eingebette-
te) Scheibe berandet durch den Meridian $\partial[S] = [m]$. Ein Repräsentant wäre

$$S := \{(x, 0, z) \in N \mid 1/2 \leq x \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}. \quad 217$$

Wir haben $f : N \rightarrow S^1$, $(r \cos(\theta), r \sin(\theta), s) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$ und für $p \in S^1$ ist
 $f^{-1}(p) = S$ klar.



Somit ist $x_N(\varphi) = 0$. Dem Thema aus Beispiel 2.20 ähnlich findet man für einen elektrischen Fluss $[d\theta]$ durch einen Zylinder Z nach Ampères Gesetz das Magnetfeld, welches um den Draht zirkuliert.

Beispiel. Sei $Z_j := \text{int}(D_{1/2}^2(c_j) \times [-1, 1])$ der offene Vollzylinder um c_j für $c_1 = (0, 0)$ und $c_2 = (2, 0)$ und

$$N := [-1, 3] \times [-1, 1]^2 \setminus (Z_1 \cup Z_2). \quad 218$$

Dann ist $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (freies Produkt) und $H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, erzeugt durch die Winkel-
formen $\varphi_1 = [d\theta_1]$ und $\varphi_2 = [d\theta_2]$ um die jeweiligen Zylinder.

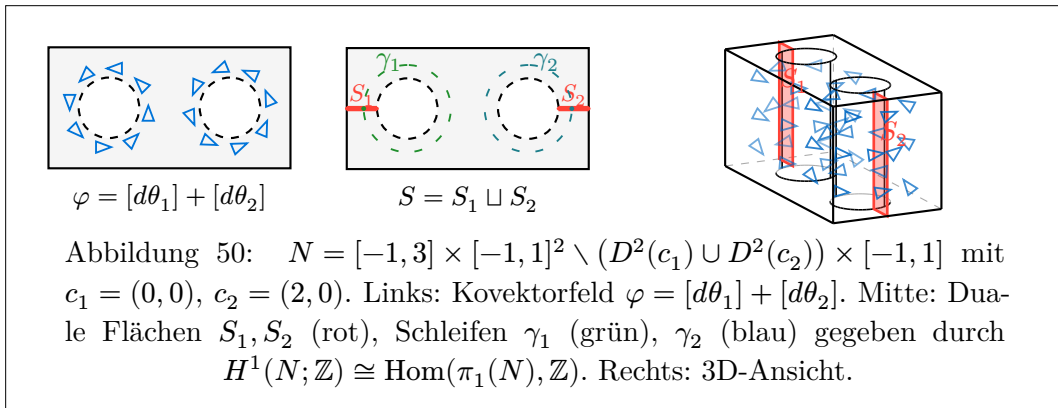
Für die Kohomologiekategorie $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ besteht die duale Fläche aus zwei dis-
junkten meridionalen Scheiben

$$S := S_1 \sqcup S_2 \quad 219$$

mit

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, 0, z) \mid -1 \leq x \leq -1/2, -1 \leq z \leq 1\}, \\ S_2 &:= \{(x, 0, z) \mid 5/2 \leq x \leq 3, -1 \leq z \leq 1\}. \end{aligned} \quad 220$$

Dabei verbindet S_1 den Zylinderrand ∂Z_1 bei $x = -1/2$ mit der Würfelfläche $x = -1$ und S_2 den Zylinderrand ∂Z_2 bei $x = 5/2$ mit $x = 3$. Jede Komponente ist ein Rechteck $S_j \cong [0, 1]^2 \cong D^2$, also $\chi_-(S) = 0$ und $x_N(\varphi) = 0$.

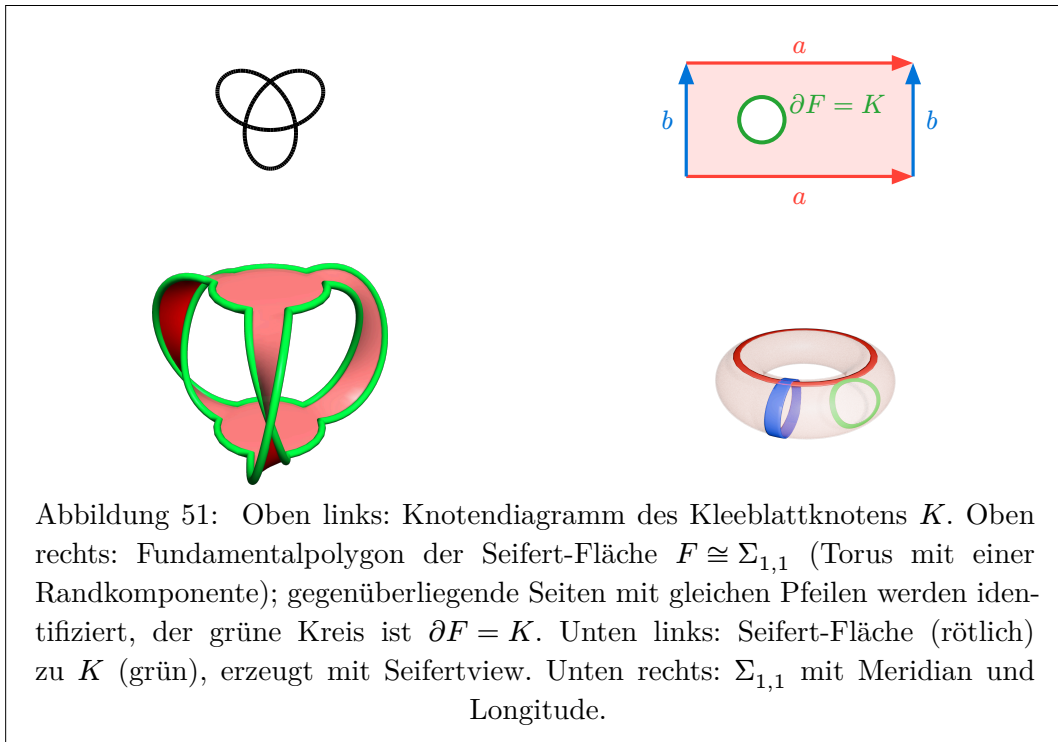


Wir haben $x_N(\varphi) = 0$.

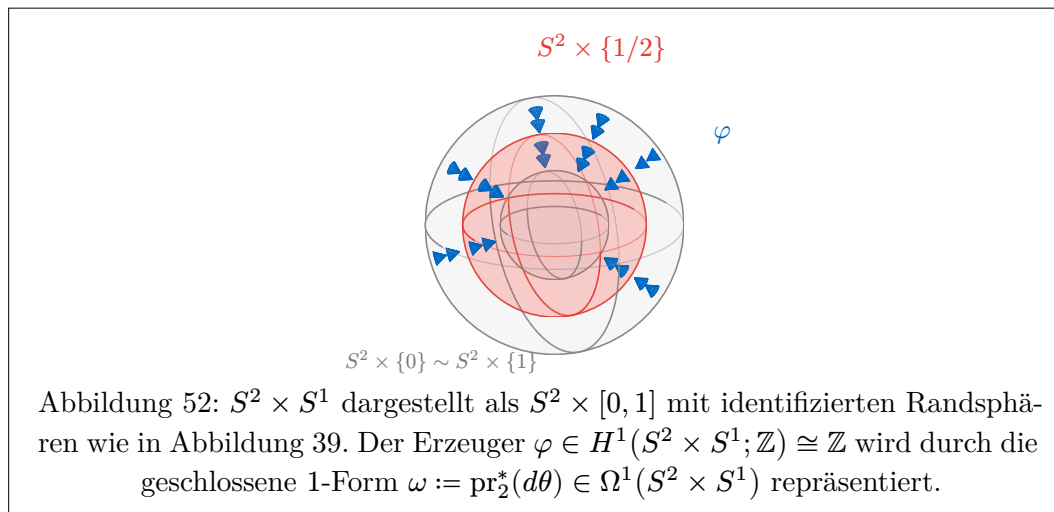
In den vorangehenden Beispielen war $\chi_-(S) = 0$, da die dualen Flächen stets Scheiben waren. Die Thurston-Norm kann aber auch nichttriviale Werte annehmen:

Beispiel. Sei $K = T_{2,3}$ der Kleeblattknoten und $N := S^3 \setminus \nu(K)$ das Knotenkomplement. Dann ist $H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Der Erzeuger $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ ist Lefschetz-dual zu einer Seifert-Fläche F minimalen Geschlechts [3, S. 29]. Das Geschlecht eines (p, q) -Torusknotens ist $g(T_{p,q}) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ [3, S. 29], also $g(K) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$. Da eine Seifert-Fläche minimalen Geschlechts g für einen Knoten K eine kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht g mit einer Randkomponente ($\partial F = K$) ist, folgt $F \cong \Sigma_{1,1}$. Somit

$$\begin{aligned} \chi(F) &= 2 - 2 \cdot 1 - 1 = -1 \\ \chi_-(F) &= 1. \end{aligned} \tag{221}$$



Entgegen ihres Namens ist die Thurston-Norm keine Norm, da $x_N(\varphi)$ für gewisse $\varphi \neq 0$ den Wert 0 annehmen kann. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn φ durch eine eingebettete Sphäre repräsentiert wird. Diesen Fall können wir leicht in Abbildung 39 erkennen.



Es gilt jedoch $x_N(k\varphi) = |k|x_N(\varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, da $k\varphi$ repräsentiert wird durch k disjunkte Flächen, welche φ repräsentieren. Analog $x_N(\varphi + \psi) \leq x_N(\varphi) + x_N(\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in H^1(N; \mathbb{Z})$, da zwei eigentlich eingebettete Flächen mit transversalem Schnitt die Summe ihrer Homologieklassen repräsentieren.

Weil x_N linear in jedem Strahl durch den Ursprung ist, können wir x_N auf $H^1(N; \mathbb{Q})$ durch $x_N(\varphi/n) := x_N(\varphi)/n$ erweitern für $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Weil x_N konvex ist, können wir x_N sogar auf $H^1(N; \mathbb{R})$ eindeutig und stetig fortsetzen. Wir werden x_N im folgenden immer als auf $H^1(N; \mathbb{R})$ definiert betrachten. Zusammengefasst erhalten wir:

Proposition 3.21. Die Thurston-Norm $x_N : H^1(N; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ lässt sich eindeutig und stetig auf $H^1(N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ als Halbnorm fortsetzen:

$$\begin{aligned} x_N(k\varphi) &= |k|x_N(\varphi) & \forall k \in \mathbb{R}, \varphi \in H^1(N; \mathbb{R}) \\ x_N(\varphi + \psi) &\leq x_N(\varphi) + x_N(\psi) & \forall \varphi, \psi \in H^1(N; \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{222}$$

Wie bereits besprochen fehlt der Thurston-Norm die Definitheit um eine Norm zu sein, womit sie *entartet* ist. Für hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten N mit endlichem Volumen ist es jedoch bekannt, dass die Thurston-Norm nicht entartet ist (vgl. [8, S. 992]).

Wie es sich für eine Norm gehört, möchten wir den Einheitsball $B_{x_N} := \{\varphi \in H^1(N; \mathbb{R}) \mid x_N(\varphi) \leq 1\}$ betrachten. Dieser ist ein nicht unbedingt zusammenhängender, konvexer Polyeder, welcher Punktsymmetrisch zum Ursprung ist und endlich viele Flächen S_i gegeben durch rationale affine Hyperflächen hat. [8, S. 992].

Angenommen N fasert über S^1 durch $f : N \rightarrow S^1$, so repräsentiert jede Faser $f^{-1}(p)$ eine Homologieklass $[f^{-1}(p)] \in H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Nach Lefschetz-Dualität

erhalten wir eine eindeutige Lösung $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ zu $[N] \frown \varphi = [f^{-1}(p)]$. (Hier nutzen wir die Orientierung von N durch $[N]$.)

Definition 3.22 (*Y. Liu [8, S. 12]*). Wir sagen, $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ ist eine *gefaserte Klasse*, wenn sie Lösung der Gleichung

$$[N] \frown \varphi = [f^{-1}(p)] \quad 223$$

für die Faserung $f : N \rightarrow S^1$ und $p \in S^1$ beliebig ist.

Ein Beispiel einer gefaserten Klasse konnten wir in Abbildung 49 sehen, wohingegen Abbildung 50 keine gefaserte Klasse enthält. Ist φ gefasert mit Faser $\Sigma := f^{-1}(p)$, so ist N der *Abbildungstor* $M(\Sigma, h) := (\Sigma \times [0, 1]) / ((x, 0) \sim (h(x), 1))$ eines Diffeomorphismus $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$, der *Monodromie* von φ [3, S. 33].

Ist φ gefasert und N irreduzibel mit inkompressiblem Rand, (insbesondere also ohne Kompressionsscheiben), so haben wir $x_N(\varphi) = \chi_-(\Sigma)$ für Σ die zu φ korrespondierende eigentlich eingebettete Fläche [8, S. 12].

Nach Thurston sind die gefaserten Klassen an speziellen Punkten in B_{x_N} verteilt: Wie gerade beschrieben, können wir auf ∂B_{x_N} eine Fläche S_i betrachten. Jede gefaserte Klasse liegt in einem der offenen Kegel mit Spitze im Ursprung und Basis S_i und wir nennen diese Kegel *gefaserte Kegel*.

Definition 3.23. Sei N eine 3-Mannigfaltigkeit. Wir nennen $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ *quasi-gefasert*, wenn φ der Limes von gefaserten Klassen in $H^1(N; \mathbb{Q})$ ist.

Anders ausgedrückt: Ein nicht-triviales $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ ist genau dann quasi-gefasert, wenn es auf dem Abschluss einer Seite S_i von B_{x_N} liegt. Insbesondere ist jede gefaserte Klasse eine quasi-gefaserte Klasse [59, S. 94]. Äquivalent dazu gilt: φ ist genau dann quasi-gefasert, wenn jede Umgebung von φ in $H^1(N; \mathbb{R})$ eine gefaserte Klasse enthält.

Lemma 3.24 (*W. Lück [39, S. 48]*). Wenn $F \rightarrow M \xrightarrow{p} S^1$ ein Faserbündel der 3-Mannigfaltigkeit M mit einer kompakten Fläche F ist, dann gilt

$$x_M(\varphi) = \begin{cases} -\chi(F) & \text{wenn } \chi(F) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad 224$$

Motiviert durch Abbildung 49 und Abbildung 50 erhalten wir folgende Proposition, welche ursprünglich für gewichteter Kodimension-1-Unterräume von Turaev [56, Lemma 1.2, S. 6 und § 4.2, S. 15] formuliert wurde. Diese korrespondieren jedoch zu unseren eigentlich eingebetteten Flächen die transversal zu den Kohomologieklassen verlaufen. Wir formulieren die Proposition hier wie Liu mittels Homologieklassen in $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$.

Proposition 3.25. Sei $N \notin \{S^3 \times S^1, S^1 \times S^2\}$ eine prim orientierbare kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem oder toroidalem Rand und $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$. Dann existiert eine eigentlich eingebettete orientierte Fläche $S \subset N$ mit Zusammenhangskomponenten $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ und Gewichten $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit:

1. $\sum_{i=1}^l r_i [\Sigma_i] \in H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$ ist Poincaré-dual zu φ ,
2. $\sum_{i=1}^l r_i \chi_-(\Sigma_i) \leq x_N(\varphi)$,

3. $N \setminus S$ ist zusammenhängend.

Beweisidee: Durch Poincaré-Lefschetz-Dualität $D_N : H^1(N; \mathbb{Z}) \cong H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$, $\varphi \mapsto \varphi \frown [N, \partial N]$, wird $D_N(\varphi)$ durch eine eigentlich eingebettete orientierte Fläche $\Sigma \subset N$ repräsentiert. Wir wählen diese so, dass die Thurston-Norm minimiert wird, das heißt $\chi_-(\Sigma) = x_N(\varphi)$. Seien $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ die Zusammenhangskomponenten von Σ und setze zunächst Vielfachheiten $w_j := 1$, sodass $D_N(\varphi) = \sum_{j=1}^m w_j [S_j]$ in $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$.

Falls $N \setminus S$ zusammenhängend ist, setze $\Sigma_i := S_i$, $r_i := 1$, und (1)–(3) sind erfüllt.

Andernfalls verringern wir die Komponentenanzahl des Komplements iterativ (vgl. [56, Lemma 1.2, S. 6]). \square

Definition 3.26. Wir sagen, eine Eigenschaft P gelte für eine Gruppe G , wenn es eine Untergruppe $H < G$ mit endlichem Index gibt, so dass H die Eigenschaft P erfüllt. In diesem Fall sagen wir auch, G habe die Eigenschaft P virtuell.

Beispiel. Jede abelsche Gruppe ist virtuell abelsch. Ein nicht-triviales Beispiel einer virtuell abelschen Gruppe wäre ein semidirektes Produkt $\mathbb{Z}^2 \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$ mit der nicht-trivialen Aktion von $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$ auf \mathbb{Z}^2 . Ein Gruppe die nicht virtuell abelsch ist wäre die diskrete Heisenberg-Grupp $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} = z, [x, z] = [y, z] = 1 \rangle$

Definition 3.27. Eine Gruppe π heißt *residuell endlich rational auflösbar* (RFRS), wenn eine Filtration von π durch Untergruppen $\pi = \pi_0 \geq \pi_1 \geq \pi_2 \dots$ existiert, mit

1. $\bigcap_i \pi_i = \{1\}$,
2. für alle i ist $\pi \triangleright \pi_i$ mit $[\pi : \pi_i] < \infty$,
3. für alle i faktorisiert $\pi_i \rightarrow \pi_i/\pi_{i+1}$ durch $\pi_i \rightarrow H_1(\pi_i; \mathbb{Z})/\text{torsion}$.

Theorem 3.28 (I. Agol [60], S. Friedl und T. Kitayama [61, Thm. 1.2]). *Sei N eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit, die keine geschlossene Graphenmannigfaltigkeit ist. Der Virtuelle Faserungssatz besagt: Dann ist $\pi_1(N)$ virtuell RFRS und es existiert eine endliche reguläre Überlagerung $p : \hat{N} \rightarrow N$, so dass für jedes $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ das Pull-Back $p^*\varphi \in H^1(\hat{N}; \mathbb{R})$ quasi-gefasert ist.*

4 Die ℓ^2 -Alexander-Torsion

Rekapitulieren wir: Wir starteten mit der algebraischen Torsion in Definition 2.4, welche wir durch eine passende Darstellung zur Definition der Reidemeister-Torsion verwendeten. Die Observation, dass es eine völlig kanonische Wahl von Darstellung durch die linksreguläre Darstellung $\cdot \llcorner \cdot : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ gibt, führte uns dann zu der ℓ^2 -Torsion. Dennoch existieren natürlich noch weitere Darstellungen $G \curvearrowright \ell^2(G)$ und bereits durch eindimensionales Twisten erhalten wir eine tiefe Theorie.

Diese Information wird mittels der ℓ^2 -Alexander-Torsion enkodiert.

$$\tau^{(2)}(M, \mathfrak{s}, \varphi, \gamma) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \quad 225$$

enkodiert welche auch als φ -getwistete ℓ^2 -Torsionsfunktion

$$\tau^{(2)}(M, \mathfrak{s}, \varphi, \gamma) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad 226$$

gebräuchlich ist. Ihr Zusammenhang ist

$$\rho^{(2)}(M, \mathfrak{s}; \varphi, \gamma)(t) = -\ln \tau^{(2)}(M, \mathfrak{s}, \varphi, \gamma)(t).$$

4.1 Zulässige Tripel

Um die ℓ^2 -Alexander-Torsion zu definieren, benötigen wir einen geeigneten Rahmen, der die Eingabedaten (N, φ, γ) präzisiert. Dubois, Friedl und Lück, sowie Liu führen hierzu den Begriff des *zulässigen Tripels* ein.

Definition 4.1 (Y. Liu [8, S. 988]). Wir schreiben $(\pi, \varphi, \gamma)_L^G$ und sagen, dass dieses Tripel *zulässig* ist, wenn

- $(L, +) \leq (\mathbb{R}, +)$ eine topologische Gruppe mit der Unterraumtopologie,
- (π, \cdot) eine abzählbare Gruppe,
- G eine abzählbare, diskrete Gruppe,
- $\varphi \in \text{Hom}_{\text{grp}}(\pi, G)$ ein Homomorphismus ist,
- und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\gamma} & G \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists \psi \\ & & L \end{array}$$

kommutiert.

Wir betrachten $\text{Hom}_{\text{grp}}(G, L)$ als topologischen Raum bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie.

Analog: ist N eine kompakte und glatte Mannigfaltigkeit, welche möglicherweise einen Rand hat, $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R}) = \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{R})$ und $\gamma : \pi_1(N) \rightarrow G$, so nennen wir $(N, \varphi, \gamma)_L^G$ *zulässiges Tripel*, falls $(\pi_1(N), \varphi, \gamma)_L^G$ ein zulässiges Tripel bildet.

Bemerkung. Falls $\gamma : \pi \rightarrow G$ ein Homomorphismus ist, sodass die Projektionsabbildung $\pi \twoheadrightarrow H_1(\pi; \mathbb{Z}) / \text{torsion}$ über γ faktorisiert, so ist $(\pi, \varphi, \gamma)_L^G$ für *jedes* nicht-triviale $\varphi \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{R})$ ein zulässiges Tripel. Dies folgt daraus, dass jeder Homomorphismus $\varphi : \pi \rightarrow \mathbb{R}$ über die Abelianisierung $\pi \twoheadrightarrow H_1(\pi; \mathbb{Z})$ faktorisiert und $\text{Hom}(H_1(\pi; \mathbb{Z}), \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_1(\pi; \mathbb{Z}) / \text{torsion}, \mathbb{R})$, da \mathbb{R} torsionsfrei ist. Insbesondere faktorisiert φ dann auch über γ . Die Notation $H_1(\pi; \mathbb{Z}) \cong \pi / [\pi, \pi]$ ist hierbei aus der Gruppentheorie bekannt [62, S. 5].

Lemma 4.2. *Der Twist-Morphismus*

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi, \gamma, t) &\in \text{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{Z}[\pi], \mathbb{R}[G]) \\ \kappa(\varphi, \gamma, t) \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) &:= \sum_{g \in G} \lambda_g t^{\varphi(g)} \gamma(g) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (\pi, \varphi, \gamma)_L^G &\text{ ist ein zulässiges Tripel} \\ t &\in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

macht $\mathbb{R}[G]$ und $\mathcal{R}(G)$ zu $\mathbb{Z}[\pi]$ -Rechtsmoduln.

Bemerkung. Die $\mathbb{Z}[\pi]$ -Rechtsmodulstruktur auf $\ell^2(G)$ entsteht gemäß Gleichung 53 aus der Komposition $\mathbb{Z}[\pi] \xrightarrow{\kappa(\varphi, \gamma, t)} \mathbb{R}[G] \hookrightarrow \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\lll} \mathcal{B}(\ell^2(G))$, sodass $w \in \pi$ durch $f \cdot w = t^{\varphi(w)} \cdot \gamma(w)^{-1} \lll f$ wirkt. Dies ist mit der $\mathcal{L}(G)$ -Linksmodulstruktur verträglich, da $g^{-1} \lll \cdot$ nach Theorem 2.28 im Kommutanten (vgl. Definition 2.26) von $\mathcal{L}(G)$ liegt:

$$T(f \cdot w) = t^{\varphi(w)} T \gamma(w)^{-1} \lll f = t^{\varphi(w)} \gamma(w)^{-1} \lll T f = (T f) \cdot w \quad 229$$

für alle $T \in \mathcal{L}(G)$. Für $G = \pi$, $\gamma = \text{id}$ und $\varphi = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Rechtsmodulstruktur $f \cdot w = w^{-1} \lll f$ aus Abschnitt 2.4.

Wir können dies als Algebrehomomorphismus auf Matrizen über $\mathbb{Z}[\pi]$ und $\mathbb{R}[G]$ fortführen:

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi, \gamma, t) &\in \text{Hom}_{\text{Rng}}(\mathbb{Z}[\pi], \mathbb{R}[G]) \\ \kappa(\varphi, \gamma, t) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{11}) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{k1}) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{kk}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 230$$

Im allgemeinen gilt jedoch

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{11}) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{k1}) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{kk}) \end{pmatrix}^* \\ &\neq \begin{pmatrix} \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{11}^*) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{k1}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{1k}^*) & \cdots & \kappa(\varphi, \gamma, t)(a_{kk}^*) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad 231$$

denn

$$\begin{aligned} \kappa(\varphi, \gamma, t) \left(\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right)^* \right) &= \kappa(\varphi, \gamma, t) \left(\sum_{g \in G} \bar{\lambda}_g g^{-1} \right) \\ &= \sum_{g \in G} \bar{\lambda}_g t^{\varphi(g^{-1})} \gamma(g^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} \bar{\lambda}_g t^{-\varphi(g)} \gamma(g)^{-1} \\ &= \kappa(\varphi, \gamma, -t) \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right)^* \end{aligned} \quad 232$$

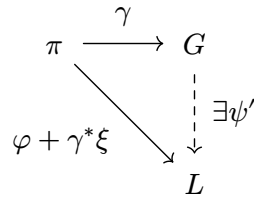
und somit gilt $\kappa(\varphi, \gamma, t) \notin \text{Hom}_{\text{Rng}^*}(\mathbb{Z}[\pi], \mathbb{R}[G])$.

Das folgende Lemma stellt sicher, dass die Gradfunktion $\xi \mapsto \text{deg}^b(\tau^{(2)}(N, \varphi + \gamma^* \xi, \gamma))$ aus Theorem 4.20(3) auf ganz $H^1(G; \mathbb{R})$ wohldefiniert ist.

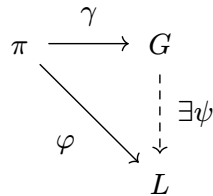
Lemma 4.3. *Ist $(\pi, \varphi, \gamma)_L^G$ ein zulässiges Tripel, so ist $(\pi, \varphi + \gamma^* \xi, \gamma)_L^G$ für alle $\xi \in \text{Hom}(G, L)$ ein zulässiges Tripel.*

Hierbei ist $\gamma^*(\cdot) : \text{Hom}(\pi, G) \times \text{Hom}(G, \cdot) \rightarrow \text{Hom}(\pi, \cdot)$ wie üblich der Pullback definiert durch $\gamma^* \xi := \xi \circ \gamma$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert:

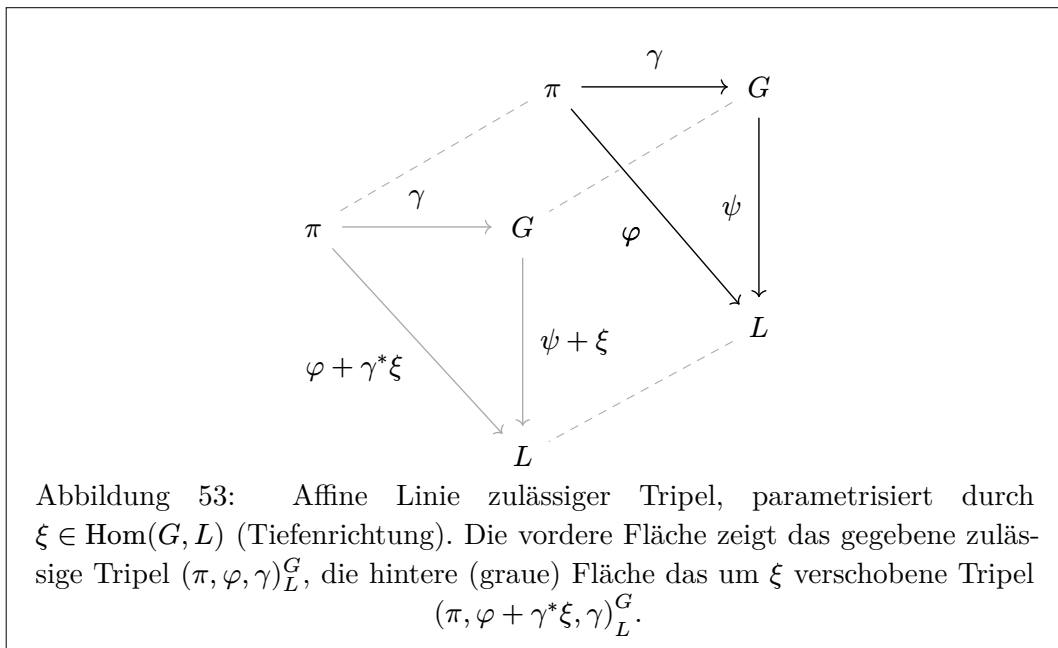


gegeben dem kommutativen Diagramm



Das gilt, weil $\varphi + \gamma^* \xi = \varphi + \xi \circ \gamma = (\psi \circ \gamma) + (\xi \circ \gamma) = (\psi + \xi) \circ \gamma$. Somit ist $\psi' := \psi + \xi$ der gesuchte Homomorphismus, sodass das Diagramm kommutiert. \square

Visuell können wir mit diesem Lemma erkennen, dass eine affine Linie, welche durch $\text{Hom}(G, L)$ parametrisiert wird an zulässigen Tripeln entlang eines gegebenen zulässigen Tripels $(\pi, \varphi, \gamma)_L^G$ existiert.



Da π und G zudem auch topologische Räume sind, haben wir nach [17, S. 110] einen induzierten Homomorphismus $f_* : H_*(\pi; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(G; \mathbb{R})$.

Lemma 4.4 (Y. Liu [8, S. 990]). *Es gilt, dass wenn $\gamma : \pi \rightarrow G$ einen Isomorphismus $\gamma_* : H_*(\pi; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(G; \mathbb{R})$ auf Homologie induziert, so ist $(\pi, \varphi, \gamma)_L^G$ für jedes $\varphi \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{R})$ ein zulässiges Tripel.*

Beweis: Weil γ_* ein Isomorphismus ist, existiert γ_*^{-1} . Somit haben wir die kurze exakte Folge

$$\pi \xrightarrow{\gamma} G \rightarrow H_1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma_*^{-1}} H_1(\pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{R} \rightarrow 0. \quad 233$$

Das bedeutet, dass φ über γ faktorisiert, da $(\varphi_*) = (\varphi_*) \circ \gamma_* \circ \gamma_*^{-1}$. Somit haben wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\gamma} & G \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists \psi \\ & & L \end{array}$$

□

4.2 Konstruktion der ℓ^2 -Alexander-Torsion

Mit den zulässigen Tripeln und dem Homomorphismus $\kappa(\varphi, \gamma, t) \in \text{Hom}_{\text{Rng}}(\mathbb{Z}[\pi], \mathbb{R}[G])$ aus Abschnitt 4.1 sowie der ℓ^2 -Torsion aus Definition 2.60 können wir nun die ℓ^2 -Alexander-Torsion konstruieren.

Sei X ein endlicher, zusammenhängender CW-Komplex mit Fundamentalgruppe $\pi := \pi_1(X)$ und sei $(\pi, \varphi \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi, \mathbb{R}), \gamma \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi, G))_L^G$ ein zulässiges Tripel nach Definition 4.1 und $t \in \mathbb{R}_+$. Wir erhalten durch $\kappa(\varphi, \gamma, t) : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{R}[G] \subset \mathbb{C}[G]$ eine $\mathbb{Z}[\pi]$ -Rechtsmodulstruktur auf $\ell^2(G)$ zusätzlich zu der linken Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Modulstruktur von $\ell^2(G)$:

$$\ell^2(G) \in {}_{\mathcal{L}(G)}^{\mathbb{Z}[\pi]} \text{Mod.} \quad 234$$

Wir erhalten durch das Twisten aus Definition 2.18 den Hilbert- $\mathcal{L}(G)$ -Modul-Kettenkomplex:

$$C(X; \kappa(\varphi, \gamma, t)) = \ell^2(G) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} C(\tilde{X}) \quad 235$$

Definition 4.5 (*J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück [3, § 4.2, S. 16–17], Y. Liu [8, S. 991]*). Die ℓ^2 -Alexander-Torsion ist definiert als

$$\begin{aligned} \tau^{(2)}(X, (\pi, \varphi, \gamma)_L^G) : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \tau^{(2)}(X, (\pi, \varphi, \gamma)_L^G)(t) &\doteq \tau^{(2)}(C(X; \kappa(\varphi, \gamma, t))) \\ &\doteq \prod_{i \in \mathbb{Z}} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FK}}(\text{id} \otimes \partial_i)^{(-1)^i} \end{aligned} \quad 236$$

und wenn $C(X; \kappa(\varphi, \gamma, t))$ nicht \det - ℓ^2 -azyklisch ist, so setzen wir $\tau^{(2)}(X, (\pi, \varphi, \gamma)_L^G)(t) := 0$. Wir schreiben auch $\tau^{(2)}(X, \varphi, \gamma)$, beziehungsweise wenn $\gamma = \text{id}$ nur $\tau^{(2)}(X, \varphi)$ und bezeichnen dies als *vollständige ℓ^2 -Alexander-Torsion* von X .

Je nach Autor wird zudem eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -Struktur $\mathfrak{s} \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(X)$ auf X als Parameter mit angegeben, um die Wahl der fundamentalen Familie von Zellen zu fixieren. Das rührt daher, dass ohne diesen Parameter die ℓ^2 -Alexander-Torsion nur bis auf Multiplikation mit t^r für ein $r \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Ohne diesen Parameter ist die ℓ^2 -Alexander-Torsion also nur bis auf die \doteq -Äquivalenz aus Definition 1.7 wohldefiniert, weshalb diese Definition auch *reduzierte ℓ^2 -Alexander-Torsion* genannt wird.

Für ein zulässiges Tripel $(N, \varphi, \gamma)_L^G$ einer Mannigfaltigkeit N können wir die ℓ^2 -Alexander-Torsion von N nach einer Wahl von CW-Struktur X auf N definieren:

$$\tau^{(2)}(X, \varphi, \gamma) := \tau^{(2)}\left(X, (\pi_1(N), \varphi, \gamma)_L^G\right) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad 237$$

Nach Theorem 2.62 ist diese wohldefiniert wegen der Homotopieinvarianz der ℓ^2 -Torsion: die Wahl der Zellzerlegung ist also analog zu Proposition 2.23 nicht relevant.

Bemerkung. Die ℓ^2 -Alexander-Torsion lässt sich auf $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erweitern, indem $t^{\varphi(w_i)}$ durch $|t|^{\varphi(w_i)}$ in der Definition von κ ersetzt wird. Es gilt dann $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(t) = \tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(|t|)$ für alle $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass die Einschränkung auf $t \in \mathbb{R}_+$ keinen Informationsverlust bedeutet.

4.3 Der Grad der ℓ^2 -Alexander-Torsion

Wir werden eine obere Abschätzung an den wachstumsbeschränkten Grad der Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion

$$\deg^b(V(t)) < \bar{\chi}(A, \varphi) \quad 238$$

herleiten. Hierbei verwenden wir die folgenden Definitionen:

Definition 4.6 (*Y. Liu [8, S. 19]*). Gegeben sei ein zulässiges Tripel $(\pi, \varphi, \gamma)_{\mathbb{R}}^G$ und $A \in \mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$, so bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}_+ &\rightarrow [0, +\infty) \\ V(t) &:= \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\pi, \varphi, \gamma, t)(A)), \end{aligned} \quad 239$$

die (*reguläre*) *Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion*, wobei G die Zielgruppe von γ ist und $\kappa(\varphi, \gamma, t)$ die induzierte Koeffizientenänderung bezeichnet.

Sei $A \in \mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$ und $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi, \mathbb{R})$.

Definition 4.7. Wir definieren die *Gruppen-Matrix-Breite* von A bezüglich φ und G als:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(A, \varphi) &:= \max\{\varphi(g) : g \in \pi, A_g \neq 0\} \\ &\quad - \min\{\varphi(g) : g \in \pi, A_g \neq 0\} \end{aligned} \quad 240$$

Wir nutzen hierbei, dass A sich eindeutig zerlegen lässt, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 4.8. *A lässt sich eindeutig zerlegen als*

$$A = \sum_{g \in \pi} A_g \cdot g \quad 241$$

mit $A_g = 0$ für fast alle $g \in \pi$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{g \in \pi} a_{1,1,g} \cdot g & \sum_{g \in \pi} a_{1,2,g} \cdot g & \dots & \sum_{g \in \pi} a_{1,k,g} \cdot g \\ \sum_{g \in \pi} a_{2,1,g} \cdot g & \sum_{g \in \pi} a_{2,2,g} \cdot g & \dots & \sum_{g \in \pi} a_{2,k,g} \cdot g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{g \in \pi} a_{k,1,g} \cdot g & \sum_{g \in \pi} a_{k,2,g} \cdot g & \dots & \sum_{g \in \pi} a_{k,k,g} \cdot g \end{pmatrix} & 242 \\
&= \sum_{g \in \pi} \begin{pmatrix} a_{1,1,g} & a_{1,2,g} & \dots & a_{1,k,g} \\ a_{2,1,g} & a_{2,2,g} & \dots & a_{2,k,g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1,g} & a_{k,2,g} & \dots & a_{k,k,g} \end{pmatrix} \cdot g \\
&= \sum_{g \in \pi} A_g \cdot g.
\end{aligned}$$

Die A_g sind fast alle 0, da die $a_{i,j}$ nur endlich viele Nicht-Null-Koeffizienten haben nach Definition 2.17. \square

Beispiel. Es gilt für $G = \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\varphi(k) &= k
\end{aligned} \tag{243}$$

und

$$\begin{aligned}
A &\in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]^{2 \times 2} \\
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(1),
\end{aligned} \tag{244}$$

dass $\check{\chi}(A, \varphi) = 2$.

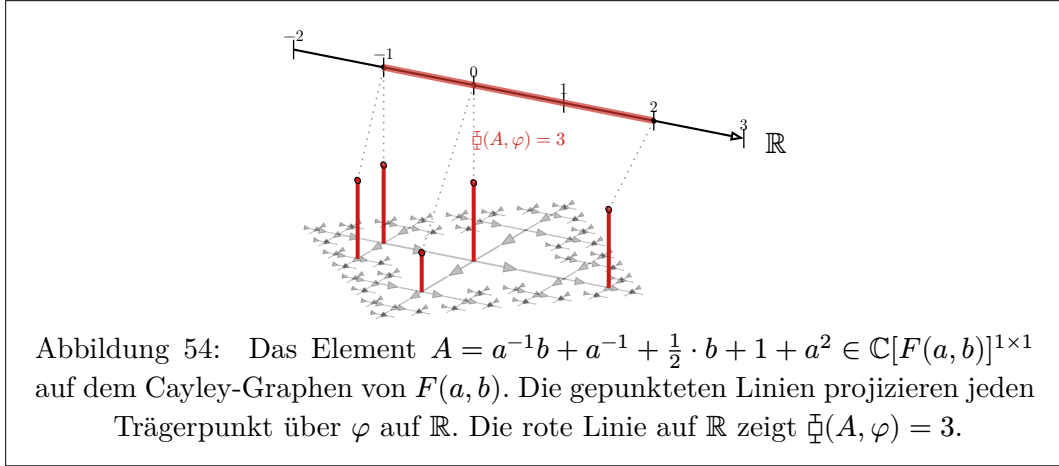
Beispiel. Es gilt für $G = F(a, b)$ und

$$\begin{aligned}
\varphi : F(a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\
\varphi(a) &= 1, \\
\varphi(b) &= 0
\end{aligned} \tag{245}$$

linear fortgesetzt und

$$\begin{aligned}
A &\in \mathbb{C}[F(a, b)]^{1 \times 1} \\
A &= 1 \cdot a^{-1}b + 1 \cdot a^{-1} + \frac{1}{2} \cdot b + 1 + 1 \cdot a^2,
\end{aligned} \tag{246}$$

dass $\check{\chi}(A, \varphi) = 3$.



Einige fast schon triviale Observationsen zu $\bar{\varphi}(\cdot, \cdot)$ möchten wir festhalten:

Lemma 4.9. Seien $A, B \in \mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{k \times k}$ durch einen beliebigen Lift in $\mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$ eingebettet, $s \in \mathbb{C}^\times$ und $\varphi, \varphi' \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi, \mathbb{R})$. Dann gilt:

1. $\bar{\varphi}(C, \varphi) = 0$
2. $\bar{\varphi}(B, \varphi) \leq \max\{\bar{\varphi}(A, \varphi), \bar{\varphi}(B, \varphi)\}$
3. $\bar{\varphi}(A \cdot B, \varphi) \leq \bar{\varphi}(A, \varphi) + \bar{\varphi}(B, \varphi)$
4. $\bar{\varphi}(s \cdot A, \varphi) = \bar{\varphi}(A, \varphi)$
5. $\bar{\varphi}(A, s \cdot \varphi) = |s| \cdot \bar{\varphi}(A, \varphi)$
6. $\bar{\varphi}(A, \varphi + \varphi') \leq \bar{\varphi}(A, \varphi) + \bar{\varphi}(A, \varphi')$

Insbesondere haben wir

Lemma 4.10 (Y. Liu [8, S. 1000, Lemma 5.2(4)]). Sei $\gamma : \pi \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, $A \in \mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$ und $\xi \in H^1(G; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\bar{\varphi}(A, \gamma^* \xi) \geq \bar{\varphi}(\gamma_* A, \xi). \quad 247$$

Hierbei ist $\gamma_* : \mathbb{C}[\pi] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ der durch γ induzierte Ringmorphismus (eintragsweise auf Matrizen angewendet) und $\gamma^* \xi = \xi \circ \gamma \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{R})$.

Beweis: Schreibe $A = \sum_{g \in \pi} A_g \cdot g$ mit $A_g \in \mathbb{C}^{k \times k}$ gemäß der Zerlegung oben. Setze

$$B_h := \sum_{g \in \pi, \gamma(g)=h} A_g \quad 248$$

für $h \in G$. Der Pushforward ist

$$\gamma_* A = \sum_{g \in \pi} A_g \cdot \gamma(g) = \sum_{h \in G} B_h \cdot h. \quad 249$$

Es gilt $B_h \neq 0$ nur wenn ein $g \in \pi$ mit $A_g \neq 0$ und $\gamma(g) = h$ existiert. Daher ist der Träger von $\gamma_* A$ im Bild des Trägers von A enthalten:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\gamma_* A) &= \{h \in G : B_h \neq 0\} \\ &\subseteq \{\gamma(g) : g \in \pi, A_g \neq 0\} = \gamma(\text{supp}(A)). \end{aligned} \quad 250$$

Die Inklusion kann echt sein, da sich Matrixkoeffizienten A_g mit gleichem Bild $\gamma(g) = h$ gegenseitig aufheben können.

Wenden wir ξ auf beide Seiten an, so erhalten wir für die Menge der ξ -Werte:

$$\{\xi(h) : B_h \neq 0\} \subseteq \{\xi(\gamma(g)) : A_g \neq 0\}. \quad 251$$

Da die rechte Menge die linke umfasst, folgt:

$$\begin{aligned} \max\{\xi(h) : B_h \neq 0\} &\leq \max\{\xi(\gamma(g)) : A_g \neq 0\} \\ \min\{\xi(h) : B_h \neq 0\} &\geq \min\{\xi(\gamma(g)) : A_g \neq 0\}. \end{aligned} \quad 252$$

Subtraktion ergibt

$$\begin{aligned} \bar{\square}(\gamma_* A, \xi) &= \max\{\xi(h) : B_h \neq 0\} - \min\{\xi(h) : B_h \neq 0\} \\ &\leq \max\{\xi(\gamma(g)) : A_g \neq 0\} - \min\{\xi(\gamma(g)) : A_g \neq 0\} \\ &= \bar{\square}(A, \gamma^* \xi). \end{aligned} \quad 253$$

□

Lemma 4.11 (Y. Liu [8, S. 21]). Gegeben sei die Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion V wie in Definition 4.6, so gilt für alle $\bar{\square} > \bar{\square}(A, \varphi)$, dass es $D_{0+}, D_{+\infty} \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\begin{aligned} D_{+\infty} - D_{0+} &< \bar{\square} \\ \lim_{t \rightarrow 0+} V(t)t^{-D_{0+}} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)t^{-D_{+\infty}} &= 0 \end{aligned} \quad 254$$

Beweis: Gegeben $\bar{\square} > \bar{\square}(A, \varphi)$; Sei $\blacksquare = \bar{\square} - \bar{\square}(A, \varphi) > 0$. Wir möchten nun \blacksquare in 5 teile aufteilen:

- $\frac{2}{5}\blacksquare$ gehen an $D_{+\infty}$,
- $\frac{2}{5}\blacksquare$ gehen an D_{0+} und
- $\frac{1}{5}\blacksquare$ bleibt als Puffer übrig (damit erhalten wir die Ungleichung)

Wir bezeichnen ein solches Fünftel mit \blacksquare

$$\begin{aligned} D_{+\infty} &= 2\blacksquare + k \cdot \max_{A_g \neq 0} \varphi(g), \\ D_{0+} &= -2\blacksquare + k \cdot \min_{A_g \neq 0} \varphi(g). \end{aligned} \quad 255$$

Wir betrachten nur den Fall $t \rightarrow +\infty$, da der Fall $t \rightarrow 0+$ analog verläuft.

Für hinreichend große $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\|t^{-D_{+\infty} + \blacksquare} \cdot \kappa(\varphi, \gamma, t)(A)\| < 1. \quad 256$$

Denn jeder Summand von

$$\kappa(\varphi, \gamma, t)(A) = \sum_{A_g \neq 0} A_g t^{\varphi(g)} \gamma(g) \quad 257$$

hat nach der Multiplikation den t -Exponenten

$$\begin{aligned} \varphi(g) - D_{+\infty} + \blacksquare &= \varphi(g) - 2\blacksquare - k \max_{A_g \neq 0} \varphi(g) + \blacksquare \\ &= \varphi(g) - k \max_{A_g \neq 0} \varphi(g) - \blacksquare \\ &\leq -\blacksquare < 0, \end{aligned} \quad 258$$

sodass $\|t^{-D_{+\infty} + \blacksquare} \cdot \kappa(\varphi, \gamma, t)(A)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$.

Und wir erhalten mittels Proposition 2.36 und Lemma 2.48

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} V(t) \cdot t^{-D_{+\infty}} &\leq 1^k \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(t^{-\blacksquare} \cdot \text{id}) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-k\blacksquare} = 0. \end{aligned} \quad 259$$

Dies liefert den behaupteten Grenzwert für $t \rightarrow +\infty$. \square

4.3.1 Multiplikative Konvexität

Die folgende Aussage ist zentral für die Anwendung auf ℓ^2 -Alexander-Torsionen.

Theorem 4.12 (*Y. Liu [8, Theorem 5.1]*). *Gegeben sei ein zulässiges Tripel $(\pi, \varphi, \gamma)_{\mathbb{R}}^G$ und $A \in \mathbb{C}[\pi]^{k \times k}$. Bezeichne*

$$V(t) = \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A)) \quad 260$$

die reguläre Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion. Angenommen, G ist endlich erzeugt und residuell endlich. Dann ist V entweder konstant 0 oder multiplikativ konvex mit beschränktem Exponenten. Ferner existiert eine Konstante $\bar{\varphi}(A, \varphi) \in [0, +\infty)$, die nur von A und φ abhängt, sodass

$$\deg^b(V) \leq \bar{\varphi}(A, \varphi). \quad 261$$

Wir skizzieren den Beweis von Theorem 4.12 nach [8, § 5]. Die Exponentenschranke $\deg^b(V) \leq \bar{\varphi}(A, \varphi)$ folgt direkt aus der multiplikativen Konvexität zusammen mit der oberen Abschätzung Gleichung 238. Es genügt daher, die multiplikative Konvexität zu zeigen. Hierzu benötigen wir die folgenden Resultate.

Lemma 4.13 (*Y. Liu [8, Lemma 5.5]*). *Sei $(\pi, \varphi, \gamma : \pi \simeq G)_{\mathbb{R}}^G$ mit G eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe. Dann ist V multiplikativ konvex.*

Beweis: Wir identifizieren $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_l^{\pm 1}]$ durch $G \cong \mathbb{Z}^l$. Nach Lemma 2.58 gilt

$$V(t) = m(p_A(\tilde{t}_1 z_1, \dots, \tilde{t}_l z_l)), \quad 262$$

wobei $p_A = \det_{\mathbb{C}[G]}(A_G(1)) \in \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_l^{\pm 1}]$ das gewöhnliche Determinantenpolynom ist und $\tilde{t}_j = t^{\varphi(e_j)}$ die reelle Skalierung der Erzeugenden beschreibt. Wir haben zwei Fälle:

Betrachten wir den rationalen Fall ($\varphi \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{Q})$). Wähle eine Basis (z_1, \dots, z_l) von $G \cong \mathbb{Z}^l$, sodass $\varphi(z_j) = 0$ für $j < l$ und $c := \varphi(z_l) \neq 0$. Dann hängt $\tilde{t}_j = t^{\varphi(z_j)}$ nur für $j = l$ von t ab, und das Mahler-Maß faktorisiert als Integral über den $(l-1)$ -dimensionalen Einheitstorus (siehe Gleichung 87):

$$\log V(t) = \frac{1}{(2\pi)^{l-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \log m(q_{\theta_1, \dots, \theta_{l-1}}(t^c z)) \, d\theta_1 \dots d\theta_{l-1}, \quad 263$$

wobei $q_{\theta_1, \dots, \theta_{l-1}}(z) = p_{A(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{l-1}}, z)} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ ein univariates Laurent-Polynom ist. Nach der Jensenschen Formel (Gleichung 181) ist $t \mapsto m(q(t^c z))$ für festes θ stückweise monomial in t , also multiplikativ konvex, d.h. $\log t \mapsto \log m(q(t^c z))$ ist konvex. Da die Integration über θ konvexe Funktionen mittelt und $\log V(t)$ als Integral solcher konvexer Funktionen in $\log t$ entsteht, bleibt die Konvexität erhalten, also ist V multiplikativ konvex.

Betrachten wir nun den reellen Fall: Approximiere φ durch eine Folge rationaler Klassen $\varphi^{(n)} \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{Q})$. Nach dem rationalen Fall ist jedes zugehörige V_n multiplikativ konvex. Die Stetigkeit des Mahler-Maßes bezüglich der Koeffizienten liefert $V_n(t) \rightarrow V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Da punktweise Limiten multiplikativ konvexer Funktionen wieder multiplikativ konvex sind, folgt die Behauptung. \square

Proposition 4.14 (Y. Liu [8, Proposition 5.4]). Sei $(\pi, \varphi, \gamma)_{\mathbb{R}}^G$ mit G endlich erzeugt und virtuell abelsch. Dann ist V multiplikativ konvex.

Beweis: Da G endlich erzeugt und virtuell abelsch ist, besitzt $\text{im}(\gamma)$ eine frei abelsche Untergruppe $\tilde{G} \leq \text{im}(\gamma)$ von endlichem Index. Setze $\tilde{\pi} := \gamma^{-1}(\tilde{G})$. Die Einschränkung $\tilde{\gamma} := \gamma|_{\tilde{\pi}} : \tilde{\pi} \twoheadrightarrow \tilde{G}$ ist surjektiv auf eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe. Nach der Restriktionsformel der regulären Fuglede-Kadison-Determinante auf Untergruppen endlichen Indexes gilt

$$V(t) = \tilde{V}(t)^{1/[\pi:\tilde{\pi}]}, \quad 264$$

wobei \tilde{V} die Determinantenfunktion für das eingeschränkte Tripel $(\tilde{\pi}, \varphi|_{\tilde{\pi}}, \tilde{\gamma})_{\mathbb{R}}^{\tilde{G}}$ bezeichnet. Nach Lemma 4.13 ist \tilde{V} multiplikativ konvex. Da positive Potenzen multiplikativ konvexer Funktionen wieder multiplikativ konvex sind, folgt die Behauptung. \square

Für residuell endliche Gruppen G wird der Beweis durch Approximation über einen kofinalen Turm virtuell abelscher Quotienten geführt. Die Schwierigkeit liegt darin, dass der ℓ^2 -Alexander-Twist nicht mit der Adjungierten vertauscht: $\kappa(\varphi, \gamma, t)(A)^* = \kappa(\varphi, \gamma, t^{-1})(A^*)$. Um dies zu umgehen, führt Liu eine ε -Perturbation ein:

Lemma 4.15 (Y. Liu [8, S. 1007–1008]). Sei $(\pi, \varphi, \gamma)_{\mathbb{R}}^G$ ein zulässiges Tripel mit G residuell endlich, und Γ_n ein kofinaler Turm virtuell abelscher Quotienten von G mit $\gamma_n : \pi \rightarrow \Gamma_n$. Für $T \in \mathbb{R}_+$ und $\varepsilon > 0$ setze

$$H_{n,\varepsilon}(T) := \kappa(\varphi, \gamma_n, T)(A)^* \cdot \kappa(\varphi, \gamma_n, T)(A) + \varepsilon \cdot 1 \quad 265$$

und

$$W_{n,\varepsilon}(s, T) := \det_{\mathcal{X}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}} \left(\kappa(\gamma_n^* \varphi, \text{id}_{\Gamma_n}, s)(H_{n,\varepsilon}(T)) \right). \quad 266$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $s \in \mathbb{R}_+$:

$$W_{n,\varepsilon}(1, T) \leq W_{n,\varepsilon}(s, T). \quad 267$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ist $H_{n,\varepsilon}(T)$ eine Matrix über $\mathbb{C}[\Gamma_n]$ mit Γ_n virtuell abelsch. Nach Proposition 4.14 ist $s \mapsto W_{n,\varepsilon}(s, T) = \det_{\mathcal{X}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}} \left(\kappa(\gamma_n^* \varphi, \text{id}, s)(H_{n,\varepsilon}(T)) \right)$ multiplikativ konvex in $s \in \mathbb{R}_+$.

Bezüglich der Symmetrie gilt, da $H_{n,\varepsilon}(T) = H_{n,\varepsilon}(T)^*$ selbstadjungiert ist, liefert die Twist-Adjunktionsformel $\kappa(\xi, \text{id}, s)(B)^* = \kappa(\xi, \text{id}, s^{-1})(B^*)$ angewandt auf $B = H_{n,\varepsilon}(T)$:

$$\kappa(\gamma_n^* \varphi, \text{id}, s)(H_{n,\varepsilon}(T))^* = \kappa(\gamma_n^* \varphi, \text{id}, s^{-1})(H_{n,\varepsilon}(T)). \quad 268$$

Mit der Invarianz $\det_{\mathcal{X}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(B) = \det_{\mathcal{X}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(B^*)$ (Lemma 2.44) folgt $W_{n,\varepsilon}(s, T) = W_{n,\varepsilon}(s^{-1}, T)$.

Minimum bei $s = 1$. Setze $w(x) := \log W_{n,\varepsilon}(e^x, T)$. Da $W_{n,\varepsilon}(\cdot, T)$ multiplikativ konvex ist, ist w konvex in $x \in \mathbb{R}$, und die Symmetrie $W_{n,\varepsilon}(s, T) = W_{n,\varepsilon}(s^{-1}, T)$ liefert $w(x) = w(-x)$. Eine symmetrische konvexe Funktion nimmt ihr Minimum im Symmetriepunkt an, also $W_{n,\varepsilon}(1, T) \leq W_{n,\varepsilon}(s, T)$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. \square

Beweisskizze von Theorem 4.12: Bezeichne $V_n(t) := \det_{\mathcal{X}(\Gamma_n)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma_n, t)(A))$ die Determinantenfunktion über dem n -ten Quotienten und $W_{n,\varepsilon}$ wie in Lemma 4.15.

Schlüsselidentitäten. Die Kompositionsregel $\kappa(\varphi, \gamma_n, st) = \kappa(\gamma_{n*}\varphi, \text{id}, s) \circ \kappa(\varphi, \gamma_n, t)$ und die Multiplikativität von \det^{fkr} (Proposition 2.36) liefern für alle $T_0, T_1 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} V_n(\sqrt{T_0 T_1})^2 &= W_{n,0}(1, \sqrt{T_0 T_1}), \\ V_n(T_0) \cdot V_n(T_1) &= W_{n,0}\left(\sqrt{T_1/T_0}, \sqrt{T_0 T_1}\right). \end{aligned} \tag{269}$$

Hierbei steht $W_{n,0}$ für den Spezialfall $\varepsilon = 0$ der Definition, der formal keiner Perturbation entspricht.

Mittelpunktskonverxität. Für $\varepsilon > 0$ liefert Lemma 4.15 $W_{n,\varepsilon}(1, \sqrt{T_0 T_1}) \leq W_{n,\varepsilon}(\sqrt{T_1/T_0}, \sqrt{T_0 T_1})$. Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$: Bei $s = 1$ ist $H_{n,\varepsilon}(T)$ positiv definit (da $\varepsilon > 0$), sodass Lemma 2.52 die exakte Konvergenz $W_{n,\varepsilon}(1, T) \rightarrow W_{\infty,\varepsilon}(1, T)$ ergibt. Für $s \neq 1$ liefert die $\lim \sup$ -Abschätzung aus Proposition 2.50 $\lim \sup W_{n,\varepsilon}(s, T) \leq W_{\infty,\varepsilon}(s, T)$. Also $W_{\infty,\varepsilon}(1, T) \leq W_{\infty,\varepsilon}(s, T)$.

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0^+$: Bei $s = 1$ konvergiert die reguläre FK-Determinante nach Lemma 2.49 exakt gegen $W_{\infty,0}(1, T)$. Für $s \neq 1$ konvergiert $\kappa(\gamma_{\infty*}\varphi, \text{id}, s)(H_{\infty,\varepsilon}(T))$ in der Operatornorm gegen $\kappa(\gamma_{\infty*}\varphi, \text{id}, s)(H_{\infty,0}(T))$, und Proposition 2.43 liefert die $\lim \sup$ -Abschätzung. Zusammen:

$$V(\sqrt{T_0 T_1})^2 = W_{\infty,0}(1, \sqrt{T_0 T_1}) \leq W_{\infty,0}\left(\sqrt{T_1/T_0}, \sqrt{T_0 T_1}\right) = V(T_0) \cdot V(T_1) \tag{270}$$

Dies ist die multiplikative Mittelpunktskonverxität.

Halbstetigkeit von oben. Da $t \mapsto \kappa(\varphi, \gamma, t)(A)$ stetig in der Operatornorm ist und \det^{fkr} die $\lim \sup$ -Abschätzung $\lim \sup \det^{\text{FKr}}_{\mathcal{R}(A_n)} \leq \det^{\text{FKr}}_{\mathcal{R}(A)}$ erfüllt (Proposition 2.43), ist V halbstetig von oben.

Schluss. Mit Lemma 1.10 folgt die volle multiplikative Konverxität. \square

4.4 Berechnung der ℓ^2 -Alexander-Torsion

Lemma 4.16 (*Y. Liu [8, S. 38]*). Sei N eine irreduzible, orientierbare, kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit leerem oder inkompressiblem toroidalem Rand, dann existieren Paare $(u_i, v_i)_{i=1, \dots, l} \in (\pi_1(N) \times \pi_1(N))^l$ und eine Matrix $A \in \mathbb{Z}[\pi_1(N)]^{k \times k}$, sodass

- die Homologieklassen $[u_i] - [v_i]$ nicht-trivial über $H^1(N; \mathbb{Q})$ sind.
- für alle $\gamma : \pi_1(N) \rightarrow G$ für die $H_1(\gamma, \mathbb{R}) : H_1(\pi_1(N); \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_1(G; \mathbb{R})$ ein Isomorphismus ist
- und für alle $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma) &\doteq \frac{\det^{\text{FKr}}_{\mathcal{R}(G)}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A))}{\prod_{i=1}^l \det^{\text{FKr}}_{\mathcal{R}(G)}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(u_i - v_i))} \\ &= \det^{\text{FKr}}_{\mathcal{R}(G)}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A)) \prod_{i=1}^l \max\{t^{\varphi(u_i)}, t^{\varphi(v_i)}\}^{-1}. \end{aligned} \tag{271}$$

Ist $\varphi = \varphi_0$ zudem primitiv in $H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z})$, können wir auch fordern, dass $\varphi_0(u_i) \neq \varphi_0(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, l$ gilt und

$$A = A_0 + \mu \begin{pmatrix} \text{id}_{k \times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{272}$$

mit $A_0 \in \mathbb{Z}[\ker(\varphi_0)]^{k \times k}$ und $\mu = 1$ und $k - 1 = x_N(\varphi_0)$

Definition 4.17 (S. Friedl und W. Lück [7, S. 16]). Wir sagen eine Kohomologieklassse $\varphi_0 \in H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z})$ ist *primitiv*, wenn der durch φ_0 gegebene Homomorphismus $\pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist.

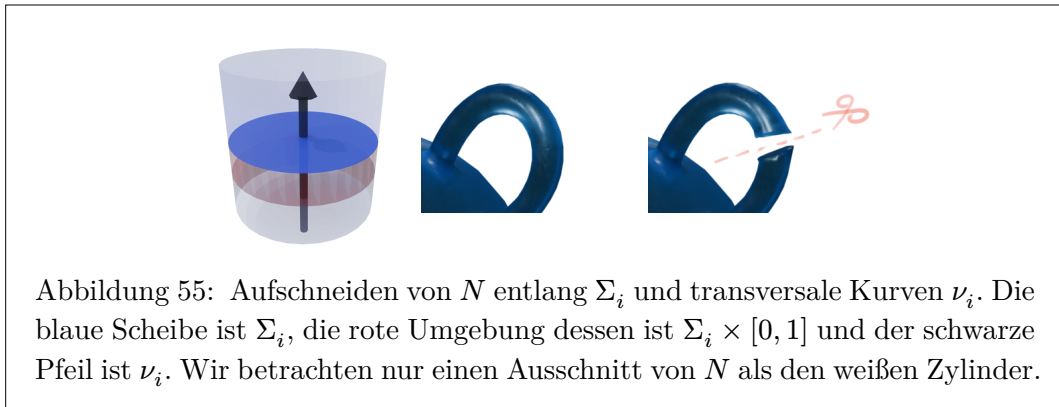
Wir können eine solche primitive Kohomologieklassse φ_0 in Abbildung 49 sehen.

Beweis: Wir dürfen $H_1(N; \mathbb{R}) \neq 0$ annehmen, da sonst $H^1(N; \mathbb{R}) = 0$ gilt und $\varphi = 0$ die einzige Kohomologieklassse ist, für welche $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)$ konstant in t ist und die Aussage ist dann trivial. Wir wählen eine primitive Kohomologieklassse $\varphi_0 \in H^1(N; \mathbb{Z})$. (Nach dem Beweis von [7, S. 16] können wir für ein $\varphi \in H^1(N; \mathbb{Q})$ ein r in $\mathbb{Q}_{>0}$ passend wählen, sodass $r\varphi$ primitiv in $H^1(N; \mathbb{Z})$ ist.) Nach Friedl in [63, Kap. 3 und 4], konstruieren wir eine $\pi_1(N)$ -äquivalente CW-Komplex-Struktur auf \tilde{N} . Wir nutzen nun Proposition 3.25 und erhalten endlich viele eigentlich eingebettete orientierte kompakte Flächen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ und entsprechend $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$, für die gilt:

- $r_1[\Sigma_1] + \dots + r_s[\Sigma_s] \in H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$ ist dual zu φ_0 .
- $-r_1\chi(\Sigma_1) - \dots - r_s\chi(\Sigma_s) = x(\varphi_0)$.
- Die Σ_i sind paarweise disjunkt und das Komplement ihrer Vereinigung in N ist zusammenhängend.

Wir möchten uns diese vorstellen wie in Abbildung 49 beziehungsweise Abbildung 50, wobei wir beachten müssen, dass Abbildung 49 eine Kompressionsscheibe hat (nicht inkompressibler toroidaler Rand) und Abbildung 50 eindeutig nicht irreduzibel nach Abschnitt 3 ist.

Wir wählen für $i = 1, \dots, s$ disjunkte orientierte tubuläre Umgebungen $\Sigma_i \times [0, 1]$ (mit $\Sigma_i = \Sigma_i \times \{0\}$) und setzen $M := N \setminus \bigcup_{i=1}^s \Sigma_i \times (0, 1)$. Geometrisch entsteht M durch Aufschneiden von N entlang der Flächen Σ_i . Für jeden Index i wählen wir eine Kurve ν_i mit Basispunkt $p \in M$, die Σ_i genau einmal positiv transversal schneidet und alle anderen Σ_j meidet. Es gilt $\varphi_0(\nu_i) = r_i$. Weiter sei $\zeta_i \in \ker(\varphi_0)$ das Gruppenelement, welches die Verklebung von $\Sigma_i \times \{3\}$ in der CW-Struktur von N beschreibt [3, S. 37–39], [63, Kap. 4]. Schließlich setzen wir $n_i := -\chi(\Sigma_i) + 2$.



Wir berechnen nun die Quadratmatrizen, welche durch $\kappa(\gamma, \varphi, t)$ induziert werden. Nach [3, S. 38], [8, S. 39] sind diese gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\nu_i \\ 1 & -\zeta_i \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[\pi_1(N)]^{2 \times 2} \quad 273$$

und wir können Lemma 2.55 und Lemma 2.54 anwenden, um die Determinante zu berechnen, wodurch wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1 \times n_1} & -\nu_1 \cdot \mathbf{1}_{n_1 \times n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1}_{n_s \times n_s} & -\nu_s \cdot \mathbf{1}_{n_s \times n_s} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad 274$$

Wir erhalten die gewünschte Formel mit Proposition 2.53

$$\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma) \doteq \det_{\mathcal{X}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A)) \prod_{i=1}^s \max \{t^{\varphi(\nu_i)}, t^{\varphi(\zeta_i)}\}^{-n_i} \quad 275$$

wobei

$$\begin{aligned} u_i &= \nu_{i \bmod s}, \forall i = 1, \dots, l. \\ v_i &= \zeta_{i \bmod s} \forall i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

□

4.5 Der Grad der ℓ^2 -Alexander-Torsion und die Thurston-Norm

In den vorigen Abschnitten haben wir zwei auf den ersten Blick verschiedenartige Invarianten einer irreduziblen 3-Mannigfaltigkeit N kennengelernt: einerseits die Thurston-Norm $x_N(\varphi)$, die geometrische Informationen anschaulich misst, andererseits die ℓ^2 -Alexander-Torsion $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)$, die rein algebraisch definiert ist.

In diesem Kapitel zeigen wir, dass beide Größen durch den asymptotischen Grad verknüpft sind. Die geometrische Grundidee lässt sich wie folgt motivieren: Ist φ eine gefaserte Klasse, so bricht die Berechnung auf einen Abbildungstorus herunter und der Twist mit $t^{\varphi(\cdot)}$ skaliert genau die Monodromie. Die Fuglede-Kadison-Determinante des getwisteten Operators wächst dann wie $t^{X-(\Sigma)} = t^{x_N(\varphi)}$ [3, Beweis von Theorem 8.5]. Gefaserte Klassen liegen dicht in den gefaserten Kegeln. Da quasi-gefaserte Klassen per Definition im Abschluss eines gefaserten Kegels liegen, überträgt sich die Gleichheit

$$\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = x_N(\varphi) \quad 276$$

mittels der Lipschitz-Stetigkeit der Gradfunktion und der Stetigkeit der Thurston-Norm auch auf quasi-gefaserte Klassen.

Wir folgen im Wesentlichen der Strategie von Liu [8, § 8] und zeigen zunächst für residuell endliches G die obere Schranke $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) \leq x_N(\varphi)$, dann die Gleichheit für gefaserte und quasi-gefaserte Klassen. Schließlich folgt der allgemeine Fall durch Übergang zu einer endlichen Überlagerung via Agols virtuellem Fasierungssatz.

4.5.1 Der Fall residuell endlicher Twists

Für diesen Abschnitt sei N eine irreduzible, kompakte, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit leerem oder inkompressiblem toroidalem Rand. Sei auch $\gamma \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\pi_1(N), G)$, wobei G eine endlich erzeugte, residuell endliche Gruppe ist, (N, γ) ein schwach ℓ^2 -azyklisches Paar bildet und γ einen Isomor-

phismus $H_1(\gamma; \mathbb{R}) : H_1(\pi_1(N); \mathbb{R}) \cong H_1(G; \mathbb{R})$ induziert. Seien $(u_i, v_i)_{i=1, \dots, l}$ und $A \in \mathbb{Z}[\pi_1(N)]^{k \times k}$ wie in Lemma 4.16.

Lemma 4.18 (Y. Liu [8, Lemma 8.2]). *Es gilt $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(1) > 0$.*

Beweis: Bei $t = 1$ wird der Twistmorphismus $\kappa(\varphi, \gamma, 1)(g) = \gamma(g)$ für alle $g \in \pi_1(N)$. Der getwistete Kettenkomplex bei $t = 1$ ist also der zelluläre ℓ^2 -Kettenkomplex der Überlagerung $\overline{N}_{\ker(\gamma)}$, aufgefasst als $\text{im}(\gamma)$ -Raum. Da (N, γ) ein schwach ℓ^2 -azyklisches Paar ist, folgt

$$\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(1) \doteq \tau^{(2)}(\overline{N}_{\ker(\gamma)}). \quad 277$$

Nach Theorem 2.62 ist $\tau^{(2)}(\overline{N}_{\ker(\gamma)}) > 0$. In der Tat: Die Randoperatoren sind Matrizen über $\mathbb{Z}[\text{im}(\gamma)]$ und $\text{im}(\gamma)$ ist als Quotient der residuell endlichen Gruppe G selbst residuell endlich. Die Determinantenvermutung (Theorem 2.40) liefert somit für jeden Randoperator ∂_k die Abschätzung $\det_{\mathcal{R}(\text{im}(\gamma))}^{\text{FKr}} \partial_k \geq 1$, woraus $\tau^{(2)}(\overline{N}_{\ker(\gamma)}) > 0$ folgt. \square

Die folgende Gradformel folgt direkt aus Lemma 4.16 und der Definition des wachstumsbeschränkten Grads (Definition 1.6):

Lemma 4.19 (Y. Liu [8, S. 1021]). *Für jedes $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt*

$$\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = \deg^b\left(\det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A))\right) - \sum_{i=1}^l |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|. \quad 278$$

Beweis: Nach Lemma 4.16 gilt $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(t) \doteq \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A)) \cdot \prod_{i=1}^l \max\{t^{\varphi(u_i)}, t^{\varphi(v_i)}\}^{-1}$. Die Funktion $t \mapsto \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A))$ ist multiplikativ konvex mit beschränktem Exponenten nach Theorem 4.12 und nirgends verschwindend nach Lemma 4.18. Somit hat diese Funktion einen wohldefinierten wachstumsbeschränkten Grad. Jeder Faktor $\max\{t^{\varphi(u_i)}, t^{\varphi(v_i)}\}^{-1}$ ist stückweise monomial mit $\deg^b\left(\max\{t^{\varphi(u_i)}, t^{\varphi(v_i)}\}^{-1}\right) = -|\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|$. Die Behauptung folgt durch Additivität des wachstumsbeschränkten Grads unter Produkten. \square

Theorem 4.20 (Y. Liu [8, Theorem 1.4]). *Für jedes $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt:*

1. $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(t)$ ist stetig, überall positiv auf \mathbb{R}_+ und $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(t) \cdot \max\{1, t\}^m$ ist multiplikativ konvex für hinreichend großes $m > 0$.
2. $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) \leq x_N(\varphi)$.
3. Die Gradfunktion $\xi \mapsto \deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi + \gamma^* \xi, \gamma))$ ist Lipschitz-stetig auf $H^1(G; \mathbb{R})$.

Beweis:

- Die Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion $V(t) := \det_{\mathcal{R}(G)}^{\text{FKr}}(\kappa(\varphi, \gamma, t)(A))$ ist multiplikativ konvex (Theorem 4.12) und nirgends verschwindend nach Lemma 4.18. Da $\max\{t^a, t^b\}^{-1}$ bis auf \doteq ebenfalls multiplikativ konvex ist, folgt die multiplikative Konvexität von $\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)(t) \cdot \max\{1, t\}^m$ für $m \geq \sum_{i=1}^l |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|$ aus der Abgeschlossenheit multiplikativ konvexer Funktionen unter Produkten. Stetigkeit und Positivität folgen hieraus direkt.
- Sei zunächst $\varphi_0 \in H^1(N; \mathbb{Z})$ primitiv. Nach dem Zusatz in Lemma 4.16 kann A so gewählt werden, dass $\varphi_0(u_i) \neq \varphi_0(v_i)$ für alle i und $k - l = x_N(\varphi_0)$. Die obere

Schranke aus Gleichung 238 liefert $\deg^b(V) \leq \mathfrak{H}(A, \varphi_0) \leq k$. Da $\varphi_0(u_i) \neq \varphi_0(v_i)$ ganzzahlig sind, folgt $\sum_{i=1}^l |\varphi_0(u_i) - \varphi_0(v_i)| \geq l$. Mit Lemma 4.19 ergibt sich $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi_0, \gamma)) \leq k - l = x_N(\varphi_0)$.

Für rationales φ skaliere auf ein ganzzahliges Vielfaches und nutze die Homogenität beider Seiten. Für reelles φ folgt die Ungleichung durch Approximation mittels der Lipschitz-Stetigkeit aus (3) und der Stetigkeit der Thurston-Norm.

- Folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit des wachstumsbeschränkten Grads der Fuglede-Kadison-Determinantenfunktion bezüglich des Pushforward der Kohomologiekategorie (Lemma 4.10). □

Als nächstes zeigen wir die Gleichheit für gefaserte und quasi-gefaserter Klassen.

Lemma 4.21 (Y. Liu [8, Korollar 8.4]). *Für jede quasi-gefaserter Klasse $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = x_N(\varphi)$.*

Beweis: Ist φ gefasert, so ist die ℓ^2 -Alexander-Torsion stückweise monomial mit $\deg^a(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = x_N(\varphi)$ nach [3, Theorem 1.3]. Insbesondere $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = \deg^a(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma)) = x_N(\varphi)$.

Ist φ quasi-gefaserter, so existiert eine Folge gefasertter Klassen $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Nach Theorem 4.20(3) ist $\varphi \mapsto \deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi, \gamma))$ Lipschitz-stetig. Auch die Thurston-Norm $\varphi \mapsto x_N(\varphi)$ ist stetig (Proposition 3.21). Da $\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi_n, \gamma)) = x_N(\varphi_n)$ für alle n , folgt die Gleichheit im Limes. □

4.5.2 Der allgemeine Fall

Sei nun N eine irreduzible, kompakte, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit leerem oder inkompressiblem toroidalem Rand, ohne weitere Einschränkungen an die Fundamentalgruppe.

Theorem 4.22 (Y. Liu [8, Theorem 1.2]). *Für jede Kohomologiekategorie $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ gilt für jeden Repräsentanten der vollständigen ℓ^2 -Alexander-Torsion $\tau^{(2)}(N, \varphi)$ die Gleichheit*

$$\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)) = x_N(\varphi). \tag{279}$$

Die obere Schranke und die Gleichheit für quasi-gefaserter Klassen stehen mit Theorem 4.20 und Lemma 4.21 bereit; es bleibt, anhand der geometrischen Toralzerlegung (Definition 3.14) zwei Fälle zu unterscheiden.

Lemma 4.23. *Ist N eine Graphenmannigfaltigkeit (Definition 3.15), so gilt für jedes $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ die Gleichheit*

$$\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)) = x_N(\varphi). \tag{280}$$

Beweis: Die ℓ^2 -Alexander-Torsion ist in diesem Fall stückweise monomial und die Gleichheit folgt aus [3, Theorem 1.2] und [64]. □

Lemma 4.24. *Enthält die JSJ-Zerlegung von N mindestens ein hyperbolisches Stück, so gilt für jedes $\varphi \in H^1(N; \mathbb{R})$ die Gleichheit*

$$\deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)) = x_N(\varphi). \tag{281}$$

Beweis: Da die JSJ-Zerlegung ein hyperbolisches Stück enthält, ist $\pi_1(N)$ virtuell RFRS nach Theorem 3.28 und wir erhalten auch durch den virtuellen Faserungssatz (Theorem 3.28) eine endliche reguläre Überlagerung $p : \overline{N}_H \rightarrow N$ mit $H \trianglelefteq \pi_1(N)$ und $d := [\pi_1(N) : H]$, sodass $p^*\varphi$ quasi-gefasert ist. Da \overline{N}_H ebenfalls eine irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit residuell endlicher Fundamentalgruppe ist, liefert Lemma 4.21 die Gleichheit

$$\deg^b(\tau^{(2)}(\overline{N}_H, p^*\varphi)) = x_{\overline{N}_H}(p^*\varphi). \quad 282$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)) &\stackrel{h_1}{=} \frac{1}{d} \cdot \deg^b(\tau^{(2)}(N, \varphi)^d) \\ &\stackrel{h_2}{=} \frac{1}{d} \cdot \deg^b(\tau^{(2)}(\overline{N}_H, p^*\varphi)) \\ &\stackrel{h_3}{=} \frac{1}{d} \cdot x_{\overline{N}_H}(p^*\varphi) \\ &\stackrel{h_4}{=} \frac{1}{d} \cdot d \cdot x_N(\varphi) \\ &= x_N(\varphi), \end{aligned} \quad 283$$

wobei

h_1 : Homogenität von \deg^b ,

h_2 : $\tau^{(2)}(\overline{N}_H, p^*\varphi) \doteq \tau^{(2)}(N, \varphi)^d$ nach Theorem 2.62,

h_3 : nach Lemma 4.21,

h_4 : Thurston-Norm-Multiplikativität nach Proposition 3.21. □

Beweis von Theorem 4.22: Anhand der geometrischen Toralzerlegung (Definition 3.14) ist N entweder eine Graphenmannigfaltigkeit oder enthält mindestens ein hyperbolisches JSJ-Stück. Im ersten Fall folgt die Behauptung aus Lemma 4.23, im zweiten aus Lemma 4.24. □

Bibliografie

- [1] L. Taams, „Reidemeister Torsion and the Classification of Lens Spaces“.
- [2] S. Friedl und S. Vidussi, „Twisted Alexander Polynomials Detect Fibered 3-Manifolds“. Zugegriffen: 15. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/0805.1234>
- [3] J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück, „The L^2 -Alexander Torsion of 3-Manifolds“. Zugegriffen: 14. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/1410.6918>
- [4] J. Dubois, S. Friedl, und W. Lück, „The L^2 -Alexander Torsions of 3-Manifolds“, *Comptes Rendus. Mathématique*, Bd. 353, Nr. 1, S. 69–73, Nov. 2014, doi: 10.1016/j.crma.2014.10.012.
- [5] K. Reidemeister, „Homotopieringe und Linsenräume“, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Bd. 11, Nr. 1, S. 102–109, Dez. 1935, doi: 10.1007/BF02940717.
- [6] W. Lück, „ L^2 -Torsion and 3-Manifolds“. Zugegriffen: 3. April 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://him-lueck.uni-bonn.de/data/mall.pdf>
- [7] S. Friedl und W. Lück, „The L^2 -torsion Function and the Thurston Norm of 3-Manifolds“, *Commentarii Mathematici Helvetici*, Bd. 94, Nr. 1, S. 21–52, März 2019, doi: 10.4171/cmh/453.
- [8] Y. Liu, „Degree of L^2 Alexander Torsion for 3-Manifolds“, *Inventiones mathematicae*, Bd. 207, Nr. 3, S. 981–1030, März 2017, doi: 10.1007/s00222-016-0680-6.
- [9] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Bd. 5. in Graduate Texts in Mathematics, vol. 5. New York, NY: Springer New York, 1978. doi: 10.1007/978-1-4757-4721-8.
- [10] A. Baker, „NOTES ON BASIC HOMOLOGICAL ALGEBRA“.
- [11] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, 1. Aufl. Cambridge University Press, 1994. doi: 10.1017/CBO9781139644136.
- [12] V. Turaev, *Introduction to Combinatorial Torsions*. Basel: Birkhäuser Basel, 2001. doi: 10.1007/978-3-0348-8321-4.
- [13] H. Kammeyer, *Introduction to ℓ^2 -Invariants*, Bd. 2247. in Lecture Notes in Mathematics, vol. 2247. Cham: Springer International Publishing, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-28297-4.
- [14] D. Burghlea, T. Kappeler, P. McDonald, und L. Friedlander, „Analytic and Reidemeister Torsion for Representations in Finite Type Hilbert Modules“, *Geometric & Functional Analysis GAFA*, Bd. 6, Nr. 5, S. 751–859, Sep. 1996, doi: 10.1007/BF02246786.
- [15] S. Saha u. a., „Cosmic Topology. Part Ic. Limits on Lens Spaces from Circle Searches“, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Bd. 2025, Nr. 1, S. 4, Jan. 2025, doi: 10.1088/1475-7516/2025/01/004.
- [16] W. Franz, „Über die Torsion einer Überdeckung.“, *crll*, Bd. 1935, Nr. 173, S. 245–254, 1935, doi: 10.1515/crll.1935.173.245.
- [17] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. New York: Cambridge university press, 2001.

- [18] J. W. Alexander, „Note on Two Three-Dimensional Manifolds with the Same Group“. 1919. doi: 10.2307/1989031.
- [19] G. E. Bredon, *Equivariant Cohomology Theories*, Bd. 34. in Lecture Notes in Mathematics, vol. 34. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1967. doi: 10.1007/BFb0082690.
- [20] T. Matumoto, „On G-CW Complexes and a Theorem of J. H. C. Whitehead“.
- [21] S. Illman, „Equivariant Algebraic Topology“, *Annales de l'Institut Fourier*, Bd. 23, Nr. 2, S. 87–91, 1973, doi: 10.5802/aif.458.
- [22] W. Lück, *L2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. doi: 10.1007/978-3-662-04687-6.
- [23] A. Shepler und S. Witherspoon, „Resolutions for Twisted Tensor Products“, *Pacific Journal of Mathematics*, Bd. 298, Nr. 2, S. 445–469, März 2019, doi: 10.2140/pjm.2019.298.445.
- [24] L. I. Nicolaescu, „Notes on the Reidemeister Torsion“.
- [25] „Reidemeister-Torsion“. 31. Mai 2024. Zugegriffen: 19. März 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Reidemeister-Torsion&oldid=245517917>
- [26] J. Milnor, „A Duality Theorem for Reidemeister Torsion“, *Annals of Mathematics*, Bd. 76, Nr. 1, S. 137–147, 1962, doi: 10.2307/1970268.
- [27] J. W. Milnor, „Infinite Cyclic Coverings“. Zugegriffen: 15. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/milncycl.pdf>
- [28] P. De La Harpe, „Fuglede–Kadison Determinant: Theme and Variations“, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Bd. 110, Nr. 40, S. 15864–15877, Okt. 2013, doi: 10.1073/pnas.1202059110.
- [29] B. Fuglede und R. V. Kadison, „Determinant Theory in Finite Factors“, *Annals of Mathematics*, Bd. 55, Nr. 3, S. 520–530, 1952, doi: 10.2307/1969645.
- [30] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Nr. 118. in Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [31] W. Lück, „Classical Torsion and L2-torsion“, [Online]. Verfügbar unter: https://people.mpim-bonn.mpg.de/teichner/Math/ewExternalFiles/SS2018_5.pdf
- [32] W. Luck, „APPROXIMATING LU-INVARIANTS BY THEIR FINITE-DIMENSIONAL ANALOGUES“.
- [33] W. Lueck, „Twisting L^2 -Invariants with Finite-Dimensional Representations“, *Journal of Topology and Analysis*, Bd. 10, Sep. 2015, doi: 10.1142/S1793525318500279.
- [34] „Aschenbrenner-Friedl-Wilton-3-manifold-groups-final-version-031115“. Zugegriffen: 9. Februar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.maths.gla.ac.uk/~mpowell/Aschenbrenner-Friedl-Wilton-3-manifold-groups-final-version-031115.pdf>
- [35] G. Everest und T. Ward, *Heights of Polynomials and Entropy in Algebraic Dynamics*. in Universitext. London ; New York: Springer, 1999.

- [36] J. Raimbault, „Exponential Growth of Torsion in Abelian Coverings“, *Algebraic & Geometric Topology*, Bd. 12, Nr. 3, S. 1331–1372, Juni 2012, doi: 10.2140/agt.2012.12.1331.
- [37] M. Gromov, „Volume and Bounded Cohomology“.
- [38] C. Löh, „Simplicial Volume - Manifold Atlas (3_28_2026 9□11□52 AM)“. Zugegriffen: 28. März 2026. [Online]. Verfügbar unter: http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Simplicial_volume
- [39] W. Lück, „Wolfgang Lück Bonn Germany Email Wolfgang.Lueck@him.Uni-Bonn.de <http://www.him.uni-bonn.de/lueck/>“.
- [40] R. H. Fox, „Free Differential Calculus. I: Derivation in the Free Group Ring“, *Annals of Mathematics*, Bd. 57, Nr. 3, S. 547–560, 1953, doi: 10.2307/1969736.
- [41] M. Powell, „Diagonal Chain Approximation for the Torus.“.
- [42] E. E. Moise, „Affine Structures in 3-Manifolds: V. The Triangulation Theorem and Hauptvermutung“, *The Annals of Mathematics*, Bd. 56, Nr. 1, S. 96, Juli 1952, doi: 10.2307/1969769.
- [43] A. Hatcher, „The Classification of 3-Manifolds — A Brief Overview“.
- [44] P. Petersen, „Riemannian Geometry“.
- [45] W. H. Jaco und P. B. Shalen, *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*, Online-Ausg., Nr. volume220. in *Memoirs of the American Mathematical Society*. Providence: American Mathematical Society, 1979.
- [46] P. W. Michor, „Topics in Differential Geometry“.
- [47] „General Topology - Definitions of a Proper Embedding - Mathematics Stack Exchange“. Zugegriffen: 20. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://math.stackexchange.com/questions/2361794/definitions-of-a-proper-embedding>
- [48] V. Guillemin und A. Pollack, *Differential Topology*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. doi: 10.1090/chel/370.
- [49] W. Lück, „Introduction to 3-Manifolds“.
- [50] I. Bokor u. a., „Connected Sum Decompositions of High-Dimensional Manifolds“, *2019-20 MATRIX Annals*, Bd. 4. Springer International Publishing, Cham, S. 5–30, 2021. doi: 10.1007/978-3-030-62497-2_1.
- [51] C. T. C. Wall, *Differential Topology*, Nr. 156. in *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2016.
- [52] J. Hempel, *3-Manifolds*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. doi: 10.1090/chel/349.
- [53] S. Smale, „DIFFEOMORPHISMS OF THE 2-SPHERE“.
- [54] A. Hatcher, „Notes on Basic 3-Manifold Topology“.
- [55] P. Scott, „The Geometries of 3-Manifolds“, *Bulletin of the London Mathematical Society*, Bd. 15, Nr. 5, S. 401–487, Sep. 1983, doi: 10.1112/blms/15.5.401.
- [56] V. Turaev, „A Homological Estimate for the Thurston Norm“. Zugegriffen: 15. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/math/0207267>

- [57] E. H. Brown und J. W. Milnor, „Topology from the Differentiable Viewpoint.“, *The American Mathematical Monthly*, Bd. 74, Nr. 4, S. 461, Apr. 1967, doi: 10.2307/2314613.
- [58] W. Thurston, „A Norm for the Homology of 3-Manifolds“, 1986, [Online]. Verfügbar unter: <https://books.google.de/books?id=eimSYgEACAAJ>
- [59] S. Friedl und S. Vidussi, „The Thurston Norm and Twisted Alexander Polynomials“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, Bd. 2015, Nr. 707, S. 87–102, Okt. 2015, doi: 10.1515/crelle-2013-0087.
- [60] I. Agol, „THE VIRTUAL HAKEN CONJECTURE“.
- [61] S. Friedl und T. Kitayama, „The Virtual Fiberings Theorem for 3-Manifolds“. Zugegriffen: 9. April 2026. [Online]. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/1210.4799>
- [62] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, 1. Aufl. Cambridge University Press, 1994. doi: 10.1017/CBO9781139644136.
- [63] S. Friedl und M. Nagel, „Twisted Reidemeister Torsion and the Thurston Norm: Graph Manifolds and Finite Representations“. Zugegriffen: 15. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/1503.07251>
- [64] G. Herrmann, „The L^2 -Alexander Torsion for Seifert Fiber Spaces“, *Archiv der Mathematik*, Bd. 109, Nr. 3, S. 273–283, Sep. 2017, doi: 10.1007/s00013-017-1062-z.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 08. April 2026

(Luca Leon Happel)